Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

SS04, Studienziel Diplom (**160 203**)

Dozent: J. König   Übung: M.Braun, B.Kubala, J.Splettstößer, D.Urban

Übungsblatt 1

Abgabe: 27.04.04 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 : Der Nabla-Operator *(3 Punkte)*

Durch den Nabla Vektor-Operator lassen sich die Operationen Gradient (grad) Divergenz (div) und Rotation (rot) sehr geschickt darstellen:

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie den Gradienten $\vec{\nabla} f(x,y,z)$ der Funktionen

(a.1) $f(x,y,z) = xyz + \sin(xyz)$

(a.2) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{r}$ mit $r = |\vec{r}\,|$ und $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z = (x,y,z)$

(b) Skizzieren Sie die folgenden Vektorfelder und berechnen Sie deren Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}(x,y,z)$

(b.1) für $\vec{r} \neq 0$: $\vec{v}(x,y,z) = \dfrac{1}{r^2}\hat{e}_r$ mit $\hat{e}_r = \dfrac{\vec{r}}{r}$

(b.2) $\vec{v}(x,y,z) = \vec{r} \times \hat{e}_z$

(c) Skizzieren Sie die folgenden Vektorfelder und berechnen Sie deren Rotation $\vec{\nabla} \times \vec{v}(x,y,z)$

(c.1) $\vec{v}(x,y,z) = (y,0,0)$

(c.2) $\vec{v}(x,y,z) = -\sin\varphi\,\hat{e}_x + \cos\varphi\,\hat{e}_y$ mit $\tan\varphi = \dfrac{y}{x}$

Aufgabe 2 : Der Levi-Civita Tensor (oder ε-Tensor) *(4 Punkte)*

Der Tensor ε_{ijk} mit $i,j,k \,\epsilon\, \{x,y,z\}$ bzw. je nach Notation $i,j,k \,\epsilon\, \{1,2,3\}$ ist definiert als

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 \text{ wenn zwei Indizes gleich sind} \\ +1 \text{ für eine gerade Permutation von (xyz), d.h. } (ijk) = (xyz),\ (yzx),\ (zxy) \\ -1 \text{ für eine ungerade Permutation von (xyz), d.h. } (ijk) = (zyx),\ (yxz),\ (xzy) \end{cases} \tag{2}$$

Mit diesem Tensor lässt sich das Vektorprodukt darstellen als $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$, bzw. $\left(\vec{\nabla} \times \vec{b}\right)_i = \epsilon_{ijk}\partial_j b_k$, wobei wir die Einsteinsche Summenkonvention benutzen, d.h. über gleiche Indizes (in diesem Fall j und k) wird summiert (Bsp. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \sum_i a_i a_i = a_i a_i$).

(a) Überzeugen Sie sich davon, dass gilt: $\epsilon_{ijk}\epsilon_{rsk} = \delta_{ir}\delta_{js} - \delta_{is}\delta_{jr}$

(b) Zeigen Sie unter Benutzung obiger Gleichung, dass gilt

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) &= \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \qquad (\textbf{BAC-CAB}\text{ Regel}) \\ \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) &= \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} \\ \vec{\nabla} \times \left(f\vec{A}\right) &= f\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) - \vec{A} \times \left(\vec{\nabla} f\right) \end{aligned}$$

wobei die Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$ und der Skalar f Funktionen von x,y und z sind.

Aufgabe 3: Gradient in Zylinderkoordinaten *(2 Punkte)*
Bis jetzt haben wir uns bezüglich Gradient, Divergenz und Rotation auf die Darstellung in kartesische Koordinaten (x, y, z) beschränkt. Oftmals vereinfachen sich Probleme, wenn man ein der Symmetrie des Problems angepasstes Koordinatensystem wählt (insbesondere Zylinder- und Kugelkoordinaten). In dieser Aufgabe wird der Gradienten in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) transformiert. Der Zusammenhang zwischen kartesischen und Zylinderkoordinaten ist:

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad z = z \tag{3}$$

und für die Einheitsvektoren gilt:

$$\hat{e}_\rho = \cos\varphi\,\hat{e}_x + \sin\varphi\,\hat{e}_y, \qquad \hat{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\hat{e}_x + \cos\varphi\,\hat{e}_y, \qquad \hat{e}_z = \hat{e}_z \tag{4}$$

(a) Berechnen Sie aus Gleichung (3) die Zylinderkoordinaten $\rho(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ als Funktion der kartesischen.

(b) Berechnen Sie $\vec{\nabla} f\,(\rho(x, y), \varphi(x, y), z)$ in Komponenten unter Verwendung der Gleichung (1) und Benutzung der Kettenregel.

(c) Ersetzen Sie schliesslich mit Gleichung (4) die kartesichen Einheitsvektoren $\hat{e}_x, \hat{e}_y$ durch $\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi$

Aufgabe 4: Anwendungen von krummlinigen Koordinaten *(3 Punkte)*
Analog zu obiger Rechnung lasssen sich auch Gradient, Divergenz und Rotation in Zylinder- und Kugelkoordinaten darstellen. Die Vektorableitungen in Zylinderkoordinaten sind: ($\vec{v} = v_\rho\mathbf{\hat{e}}_\rho + v_\varphi\mathbf{\hat{e}}_\varphi + v_z\mathbf{\hat{e}}_z$)

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{v} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho v_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
\vec{\nabla}\times\vec{v} &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right)\hat{e}_\rho + \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial\rho}\right)\hat{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho v_\varphi) - \frac{\partial v_\rho}{\partial\varphi}\right)\hat{e}_z
\end{aligned}$$

und in Kugelkoordinaten ($\vec{v} = v_r\mathbf{\hat{e}}_r + v_\vartheta\mathbf{\hat{e}}_\vartheta + v_\varphi\mathbf{\hat{e}}_\varphi$)

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\hat{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\hat{e}_\varphi \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{v} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta v_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} \\
\vec{\nabla}\times\vec{v} &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta v_\varphi) - \frac{\partial v_\vartheta}{\partial\varphi}\right]\hat{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\varphi)\right]\hat{e}_\vartheta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\vartheta) - \frac{\partial v_r}{\partial\vartheta}\right]\hat{e}_\varphi
\end{aligned}$$

Berechnen sie mit Hilfe dieser Formeln

(a) den Gradienten der Funktion $f(\rho, \varphi, z) = \dfrac{1}{\rho}$.

(b) die Divergenz und Rotation von $\vec{v}(\rho, \varphi, z) = \dfrac{1}{\rho^2}\hat{e}_\rho$ und $\vec{v}(\rho, \varphi, z) = \hat{e}_\varphi$ und vergleichen Sie letzteren Fall mit Aufgabe 1.c.2.

(c) den Gradienten der Funktion $f(r, \vartheta, \varphi) = \dfrac{1}{r}$.

(d) die Divergenz und Rotation von $\vec{v}(r, \vartheta, \varphi) = \dfrac{1}{r^2}\hat{e}_r$ und $\vec{v}(r, \vartheta, \varphi) = \hat{e}_\varphi$.