Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

SS04, Studienziel Diplom (**160 203**)

Dozent: J. König   Übung: M.Braun, B.Kubala, J.Splettstößer, D.Urban

Übungsblatt 5

Abgabe: 25.05.04 vor der Vorlesung

Aufgabe 17 : Die Legendre-Polynome *(3 Punkte)*

Die Legendre-Polynome bilden ein vollständiges orthogonales Funktionensystem (VOGS) auf dem Intervall $[-1, 1]$.

(a) Berechnen Sie $P_0,\ P_1,\ P_2$ und P_3 nach der Rodrigues-Formel und P_4 aus der Rekursionsformel. Zeichnen oder plotten Sie Ihr Resultat.

(b) Überprüfen Sie die Orthogonalität und die Normierung der Polynome an den Beispielen (P_1, P_1), (P_2, P_2), (P_0, P_1) und (P_0, P_2).

(c) Entwickeln Sie die Funktion $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ nach den berechneten Legendre-Polynomen bis zum vierten Glied. (evtl. Computer-Algebra System oder Integraltafelwerk benutzen)

(d) *Zusatzaufgabe:* Plotten Sie die Funktion $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ und ihre Entwicklung bis zur Ordnung $l = 0$, $l = 2$ und bis $l = 4$.

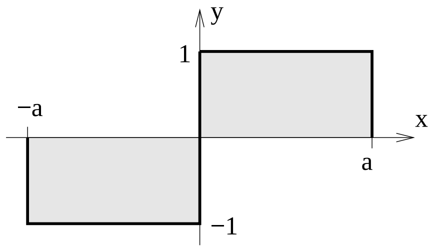
Aufgabe 18 : Die Fourier-Reihe *(3 Punkte)*

Die Menge der Funktionen $\{1,\ \cos(\frac{n\pi}{a}x),\ \sin(\frac{n\pi}{a}x)\}$ bildet ein VOGS auf dem Intervall $[-a, a]$.

(a) Überprüfen Sie allgemein die Orthogonalität der Funktionen.

(b) Entwickeln Sie die skizzierte Rechteckfunktion in eine Fourier Reihe.

(c) *Zusatzaufgabe:* Plotten Sie diese Fourier-Reihe bis zum 3., 9., und 21. Glied.



Bitte für die Übungen, Übungsklausur und Klausur **SI** Einheiten verwenden, keine CGS Einheiten.

bitte wenden

Aufgabe 19: Separationsansatz für die Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten *(3 Punkte)*
In Zylinderkoordinaten hat die Laplace-Gleichung die folgende Form:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\Phi}{d\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \frac{d^2\Phi}{dz^2} = 0 \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass mittels des Ansatzes $\Phi = R(\rho)Q(\varphi)Z(z)$ die Laplace-Gleichung in folgende Teilgleichungen separiert werden kann:

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - k^2Z = 0 \qquad \frac{d^2Q}{d\varphi^2} + \nu^2Q = 0 \qquad \frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R = 0$$

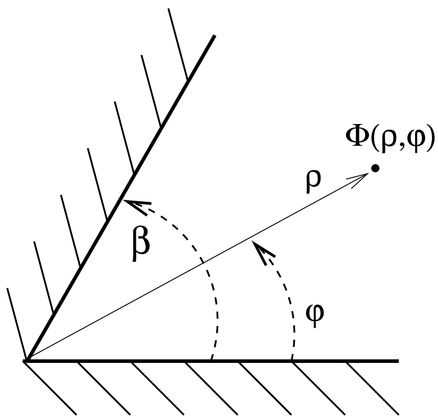
(b) Schreiben Sie die Gleichung für die Radialkomponente für $k \neq 0$ mittels Variablenwechsel in die Form $\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)R = 0$ um.

(c) Zeigen Sie, dass diese Differentialgleichung für $\nu\epsilon\mathbb{N}$ durch die Bessel-Funktionen gelöst wird:

$$J_\nu(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(\nu+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}$$

Aufgabe 20: Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten im Spezialfall $Z(z) = const.$ *(3 Punkte)*

Wenn sich für ein Problem Zylinderkoordinaten anbieten, es aber in der z-Komponente konstant ist, vereinfacht sich das Problem, insbesondere benötigt man nicht die Bessel-Funktion. Betrachtet werden soll eine Ecke aus zwei leitenden, unendlich ausgedehnten, geerdeten Ebenen. Gesucht werden alle Funktionen, die die Laplace-Gleichung und zugleich die entsprechenden Randbedingungen erfüllen.



(a) Separieren Sie mittels des Ansatzes $\Phi = R(\rho)Q(\varphi)Z_0$ die Laplace-Gleichung in folgende Teile

$$\frac{d^2Q}{d\varphi^2} + \nu^2Q = 0 \qquad \rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) = \nu^2R$$

(b) Lösen Sie die Differentialgleichungen für $\nu = 0$ und geben Sie $R_0(\rho)$ und $Q_0(\varphi)$ an.

(c) Lösen Sie die Differentialgleichungen für $\nu \neq 0$. [Tipp: Ansatz $R(\rho) \sim \rho^\alpha$]

(d) Zeigen Sie, dass die Randbedingung eines verschwindenden Potentials auf den Oberflächen die allgemeine Lösung reduziert auf:

$$\Phi(\rho,\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m\rho^{m\pi/\beta}\sin\left(\frac{m\pi}{\beta}\varphi\right)$$

Zur vollständigen Lösung müssten nun nur noch die Konstanten a_m aus der genauen Anordnung der felderzeugenden Ladungen im Raum bestimmt werden.