Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

SS04, Studienziel Diplom (**160 203**)

Dozent: J. König   Übung: M.Braun, B.Kubala, J.Splettstößer, D.Urban

Übungsblatt 9

Abgabe: 29.06.04 vor der Vorlesung

Aufgabe 33 : Eichtransformationen *(2 Punkte)*

Das Vektorpotential einer unendlich langen Spule entlang der z-Achse mit Radius R sei:

$$\vec{A}(\vec{r}\,) = \begin{cases} B(-y,0,0) & : \quad x^2+y^2 < R^2 \\ \frac{B}{2}\frac{R^2}{x^2+y^2}(-y,x,0) - \frac{B}{2}(y,x,0) & : \quad x^2+y^2 > R^2 \end{cases} .$$

(a) Berechnen Sie die magnetische Feldstärke $\vec{B}(\vec{r}\,)$.

(b) Geben Sie die Funktionen $\Lambda_1(\vec{r}\,)$ und $\Lambda_2(\vec{r}\,)$ für diejenigen Eichtransformationen

$$\vec{A}_{1/2}(\vec{r}\,) = \vec{A}(\vec{r}\,) + \nabla\Lambda_{1/2}(\vec{r}\,)$$

an, die das Vektorpotential im Innenraum der Spule auf die Form $\vec{A}_1(\vec{r}\,) = B/2(-y,x,0)$ bzw. $\vec{A}_2(\vec{r}\,) = B(-y+x,0,0)$ bringen. Geben Sie $\vec{A}_1(\vec{r}\,)$ und $\vec{A}_2(\vec{r}\,)$ auch für den Außenraum an.

(c) Welche der Vektorpotentiale erfüllen die Coulomb-Eichung $\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r}\,) = 0$?
Skizzieren Sie die Vektorpotentiale $\vec{A}(\vec{r}\,)$, $\vec{A}_1(\vec{r}\,)$ und $\vec{A}_2(\vec{r}\,)$ innerhalb und außerhalb der Spule.

Aufgabe 34 : Maxwellscher Spannungstensor *(3 Punkte)*

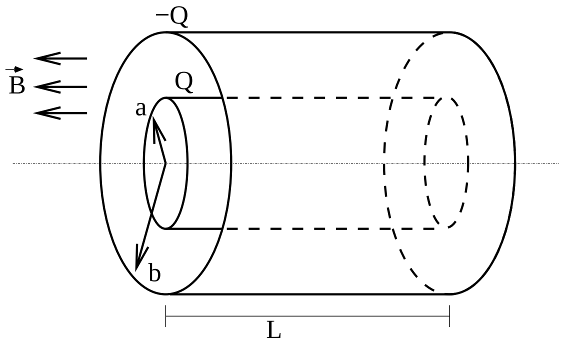
Die Kraft, die auf ein geladenes Objekt im elektromagnetischen Feld wirkt, kann mit Hilfe des Maxwellschen Spannungstensors T_{ij} berechnet werden:

$$\vec{F} = \oint_S \overleftrightarrow{T}\cdot d\vec{a} - \varepsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\iiint_V \vec{S}dV \ , \tag{1}$$

wobei die Fläche S das geladene Objekt umschließt.
Betrachten Sie nun zwei gleichnamige Punktladungen q und berechnen Sie die wirkenden Kräfte, indem Sie den Spannungstensor über jene Ebene integrieren, die im gleichen Abstand zwischen beiden Punktladungen liegt.
Wieso kann der Rest der umschließenden Fläche vernachlässigt werden? Diskutieren Sie Richtung bzw. Vorzeichen der Kräfte.

Aufgabe 35 : Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes *(4 Punkte)*

Betrachten Sie ein Teilstück der Länge L eines unendlich ausgedehnten Zylinderkondensators, auf dem die Ladungen $\pm Q$ sitzen. Der Kondensator befinde sich in einem homogenen magnetischen Feld $\vec{B}$ entlang der Zylinderachse (siehe Skizze).



(a) Bestimmen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ und den Poynting-Vektor $\vec{S}$ im Inneren des Kondensators.

(b) Berechnen Sie den Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes

$$\vec{L}_{\mathrm{em}} = \frac{1}{c^2} \iiint_V dV \quad \left[\vec{r} \times \vec{S}(t, \vec{r})\right] \ . \tag{2}$$

Wir wollen nun die Drehimpulsbilanz betrachten, wenn das magnetische Feld abgeschaltet wird:

(c) Berechnen Sie dazu für eine Änderung des magnetischen Feldes $\partial \vec{B}/\partial t$ das Drehmoment, das vom induzierten elektrischen Feld auf die Ladungen $\pm Q$ ausgeübt wird und stellen Sie die Drehimpulsbilanz auf.

Aufgabe 36 : Magnetischer Monopol *(3 Punkte)*

Betrachten Sie eine Ladung q_e im Abstand d von einem (fiktiven) magnetischen Monopol q_m. Ein solcher Monopol würde ein magnetisches Feld

$$\vec{B}_{\mathrm{mon}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_m}{r^2} \hat{r}$$

hervorrufen.
Berechnen Sie aus magnetischem und elektrischem Feld den Gesamtdrehimpuls des elektromagnetischen Feldes.

Tipp:

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \int_0^{\infty} dv \left(\frac{v}{\sqrt{v^2 + u^2}\sqrt{v^2 + (u - u_0)^2}} \right)^3 = \frac{2}{|u_0|}$$

Bemerkung: In der Quantenmechanik findet man, dass der Drehimpuls quantisiert ist. Da obiges Ergebnis unabhängig vom Abstand d ist, könnte man aus der Existenz eines einzigen magnetischen Monopols auf die Quantisierung der elektrischen Ladung schließen.