Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

SS04, Studienziel Diplom (**160 203**)

Dozent: J. König   Übung: M.Braun, B.Kubala, J.Splettstößer, D.Urban

Übungsblatt 10   Abgabe: 06.07.04 vor der Vorlesung

Aufgabe 37 : Mathematische Vorbereitung *(4 Punkte)*

Gegeben sei die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi = \frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\Psi\,. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\Psi = f(x-ct) + g(x+ct) \tag{2}$$

mit beliebigen Funktionen f und g die Wellengleichung (1) löst.

(b) Überzeugen Sie sich, dass $\sin(kx)\sin(ckt)$ auch eine Lösung der Wellengleichung (1) und in der Form (2) darstellbar ist.

(c) Die Lösung wird erst durch die Anfangswerte $\frac{d\Psi(x,0)}{dt} = \alpha(x)$ und $\Psi(x,0) = \beta(x)$ bestimmt. Zeigen Sie, dass dieses Anfangswertproblem durch folgenden Ansatz gelöst wird:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{2}\left[\beta(x+ct) + \beta(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} dx'\;\alpha(x')\,. \tag{3}$$

(d) Berechnen Sie $\Psi(x,t)$ für $\alpha(x) = \frac{A}{\cosh^2(x/a)}$ und $\beta(x) = \frac{B}{\cosh^2(x/b)}$ an.
Skizzieren Sie die Lösung für $t > 0$ und $A = 0$ bzw. $B = 0$.

Aufgabe 38 : Kugelwelle *(4 Punkte)*

Das elektrische Feld einer Kugelwelle sei gegeben durch:

$$\vec{E}(r,\vartheta,\varphi,t) = A\frac{\sin\vartheta}{r}\left[\cos(kr-\omega t) - \frac{1}{kr}\sin(kr-\omega t)\right]\hat{e}_\varphi\,, \qquad \text{mit } \frac{\omega}{k} = c\,. \tag{4}$$

(a) Finden Sie $\vec{B}(r,\vartheta,\varphi,t)$, so dass die Maxwell-Gleichungen im Vakuum erfüllt sind.

(b) Berechnen Sie den Poyntingvektor $\vec{S}$ und daraus den Intensitätsvektor $\vec{I} =< \vec{S} >$, indem Sie über eine Periode mitteln.

(c) Bestimmen Sie die abgestrahlte Leistung durch Integration der Intensität über alle Raumrichtungen.

Aufgabe 39 : Elektromagnetische Wellen und Plasmaoszillationen in Metallen *(4 Punkte)*

Das Verhalten von Elektronen in Metallen in Wechselwirkung mit dem elektrischen Feld kann durch eine klassische Bewegungsgleichung

$$\dot{\vec{v}} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m}\vec{E} \tag{5}$$

beschrieben werden. Dabei bezeichnet m die Elektronenmasse, $-e$ die Elektronenladung und $\vec{v}/\tau$ einen Reibungsterm für Stösse des Elektrons mit dem Ionengitter des Metalls. Weiterhin gelten die Maxwell-Gleichungen mit der Stromdichte $\vec{j} = -ne\vec{v}$, wobei n die Elektronendichte bezeichnet.

(a) Berechnen Sie für

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t} \tag{6}$$

das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r}, t)$ der Elektronen sowie $\vec{j}(\vec{r}, t)$. Stellen Sie das Ergebnis mit einer frequenzabhängigen Leitfähigkeit $\sigma(\omega)$ dar, definiert durch $\vec{j}(\omega) = \sigma(\omega)\vec{E}(\omega)$.

(b) Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{7}$$

und den Maxwell-Gleichungen kann im Grenzfall $\omega\tau \gg 1$ eine Gleichung für die Ladungsdichte gewonnen werden, die eine Bedingung für das Auftreten von Ladungsdichte-Oszillationen ($\rho(\vec{r}, \omega) \neq 0$) liefert. Bestimmen Sie die sog. Plasmafrequenz ω_P für die Ladungsdichte-Oszillationen auftreten können.

(c) Leiten Sie aus den Maxwell-Gleichungen die Wellengleichung

$$\Box\vec{E} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{j} + \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho \tag{8}$$

her und lösen Sie sie für $\omega \neq \omega_P$. Zeigen Sie, dass sich oberhalb der in (b) hergeleiteten Grenzfrequenz ω_P im Metall elektromagnetische Wellen ausbilden können. Wie ist das Verhalten für Frequenzen unterhalb ω_P zu interpretieren?

Hinweis: Die Schreibweise $f(\vec{r}, \omega)$ ist im Sinne einer Fouriertransformierten in der Zeit zu verstehen, d.h. es werden Lösungen zu (vor-)gegebener Frequenz ω (z.B. durch ein gegebenes oszillierendes Feld) gesucht.

Termine: (siehe auch http://www.tp3.ruhr-uni-bochum.de/~koenig/LEHRE/SS04/)

(Haupt-)Klausur: Fr, 30.07.2004, 9.30-11.30 Uhr in HZO 60
!! Achtung: auf mehrfachen Wunsch wurde der Termin der (Haupt-)Klausur von Do auf Fr verlegt !!