Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

SS04, Studienziel Diplom (**160 203**)

Dozent: J. König   Übung: M.Braun, B.Kubala, J.Splettstößer, D.Urban

Übungsblatt 11

Abgabe: 13.07.04 vor der Vorlesung

Aufgabe 40 : Phasen- und Gruppengeschwindigkeit *(2 Punkte)*

Es gibt folgende Definitionen der Geschwindigkeiten einer Wellen:

$$\text{Phasengeschwindigkeit:} \quad v_p = \frac{\omega}{k} \qquad\qquad \text{Gruppengeschwindigkeit:} \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie die Phasen- und die Gruppengeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle im Vakuum.

(b) Leiten Sie die Phasen- und die Gruppengeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle in einem metallischen Hohlleiter her $\left(\omega(k) = \sqrt{c^2k^2 + \omega_{\rm g}^2} \right)$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit.

(c) Gegeben sei das Wellenpaket: $$U(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \;\; e^{-\alpha^2(k-k_0)^2} \, e^{ik(x-\frac{\omega(k)}{k}t)}$$

Die Frequenz ω sei im Bereich um k_0 approximierbar durch $\omega(k) \approx \omega(k_0) + v_g t$ mit $v_g(k_0) = \frac{d\omega}{dk}\Big|_{k_0}$. Berechnen Sie das obige Integral, und identifizieren Sie die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit in der Rechnung.

Aufgabe 41 : Der rechteckige Wellenleiter *(6 Punkte)*

Gegeben sei ein rechteckiger, ideal leitender metallischer Wellenleiter der Breite b und Höhe a. Im Folgenden sollen die transversal magnetischen Moden ($B_z = 0$) berechnet werden.

(a) Im Inneren des Metalls verschwinden die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$. Warum folgt daraus $\hat{\mathbf{n}} \times \vec{E} = 0$ und $\hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{B} = 0$ auf der Metalloberfläche?

(b) Geben Sie die allgemeine Lösung der Wellengleichung $$\Delta E_i = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2}$$ mit Hilfe des Separationsansatzes $E_i(x,y,z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot e^{i(k_z z - \omega t)}$ an.

(c) Welche Bedingungen muss E_i an den jeweiligen Rändern erfüllen? Bestimmen Sie die Lösungen, welche diesen Randbedingungen genügen. (Tipp: starten Sie mit E_z)

(d) Suchen Sie aus der verbleibenden Auswahl an Lösungen diejenigen heraus, welche die Maxwell-Gleichung $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ auf den Rändern erfüllen.

(e) Bestimmen Sie die Konstanten für eine transversal magnetische Welle durch die Bedingungen der Maxwell-Gleichungen $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ und $\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$.

(f) Berechnen Sie $\vec{B}$ aus den Maxwell-Gleichungen und zeigen Sie, dass diese Lösung die Randbedingung $\hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{B} = 0$ erfüllt.

(g) Ermitteln Sie aus ihrem Ergebnis die Dispersion $\omega_{nm}(k_z)$. Berechnen Sie Phasen- und Gruppengeschwindigkeit der Moden in $z-$Richtung, und vergleichen Sie diese mit der Lichtgeschwindigkeit.

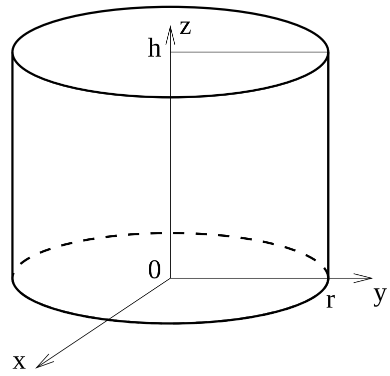
Aufgabe 42 : Der zylindrische Resonator *(4 Punkte)*
Gegeben sei ein zylindrischer Hohlraum mit Radius r und Höhe h, der von metallischen Wänden umschlossen sei.

(a) Separieren Sie die Wellengleichung $\Delta\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ für $E_z = R(\rho)\,\Phi(\varphi)\,Z(z)\,e^{-i\omega t}$.

(b) Bestimmen Sie die speziellen Lösungen $\Phi_m(\varphi)$, $Z_n(z)$, und $R_{lmn}(\rho)$ in dem Resonator.

(c) Geben Sie daraus die Resonanzfrequenzen ω_{lmn} an.

(d) Berechnen Sie für $r = h$ die 3 langsamsten Resonanzmoden. (Tipp: die q-te Nullstelle der p-ten Bessel-Funktion ist x_{pq}: $x_{01} = 2.405$; $x_{02} = 5.520$; $x_{11} = 3.832$; $x_{21} = 5.136$...)



Termine: (siehe auch http://www.tp3.ruhr-uni-bochum.de/~koenig/LEHRE/SS04/)

!! Achtung !!

Auf mehrfachen Wunsch wurde der Termin der (Haupt-)Klausur von Do auf Fr verlegt.
(Haupt-)Klausur: Fr, 30.07.2004, 9.30-11.30 Uhr in HZO 60