Theoretische Festkörperphysik II

SS06, **160303**

Dozent: Jürgen König   Übungen: B. Kubala und M. Braun

Übungsblatt 2

Besprechung: 24.05.06, 16:00, NB6/73

Aufgabe 4 : Leitfähigkeit eines klassischen Gases

Berechnen Sie die Leitfähigkeit eines klassischen Gases mittels der Boltzmanngleichung

$$\frac{\partial f_{\boldsymbol{p}}}{\partial t} + \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} f_{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{E} \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}} f_{\boldsymbol{p}} = \left(\frac{\partial f_{\boldsymbol{p}}}{\partial t}\right)_{\text{coll}} \tag{1}$$

Suchen Sie die homogene, stationäre Lösung für die linearisierte Gleichung; benutzen Sie dabei den Relaxationszeitansatz $(\partial f_{\boldsymbol{p}}/\partial t)_{\text{coll}} = -(f_{\boldsymbol{p}} - f^0_{\boldsymbol{p}})/\tau$. Da es sich um ein klassisches Gas handelt entspricht die Gleichgewichtsverteilung $f^0_{\boldsymbol{p}}$ der Boltzmannverteilung

$$f^0_{\boldsymbol{p}} = \text{const} \cdot \exp\left[-\frac{\boldsymbol{p}^2/2m}{k_{\text{B}}T}\right] \tag{2}$$

Aufgabe 5 : Lineare Dichteantwort auf ein externes Potential

Die Elektronendichte $n(\boldsymbol{r}, t)$ am Ort $\boldsymbol{r}$ zur Zeit t koppelt an ein angelegtes Potential $\Phi(\boldsymbol{r}, t)$ durch den Hamiltonian

$$H(t) = e \int d\boldsymbol{r}\; n(\boldsymbol{r}, t)\Phi(\boldsymbol{r}, t)\,. \tag{3}$$

Wie sieht die lineare Antwortfunktion der Elektronendichte $\delta n(\boldsymbol{r}, t)$ aus?

Aufgabe 6 : Lineare Dichteantwort in Fourierraum

Die lineare Antwortfunktion hat in Fourierraum die Form

$$e\,\delta n(\boldsymbol{q}, \omega) \;=\; \chi(\boldsymbol{q}, \omega)\Phi(\boldsymbol{q}, \omega) \tag{4}$$

mit der verallgemeinerten Suszeptibilität

$$\chi(\boldsymbol{q}, \omega) \;=\; \frac{e^2}{V} \sum_{\boldsymbol{k}\,\sigma} \frac{f(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}) - f(\varepsilon_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}})}{\hbar\omega + \varepsilon_{\boldsymbol{k}} - \varepsilon_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}} \tag{5}$$

(plus einem Imaginärteil, der im weiteren nicht berücksichtigt wird). Dabei bezeichnet f die Fermifunktion, und es wird die Dispersionsrelation $\varepsilon_{\boldsymbol{k}} = \frac{\hbar^2 \boldsymbol{k}^2}{2m}$ für freie Elektronen angenommenen.

(a) Das Gesamtpotential $\Phi_{\text{tot}} = \Phi_{\text{ext}}/\epsilon$ im Eleketronengas ergibt sich aus dem angelegten Potential Φ_{ext} und der Dielektrizitätskonstante ϵ. Zeigen Sie, dass die Dielektrizitätskonstante $\epsilon(\boldsymbol{q}, \omega)$ folgendermaßen mit der linearen Antwortfunktion $\chi(\boldsymbol{q}, \omega)$ zusammenhängt

$$\epsilon(\boldsymbol{q}, \omega) = 1 - \frac{1}{\epsilon_0\, \boldsymbol{q}^2}\chi(\boldsymbol{q}, \omega)\,. \tag{6}$$

Dafür benötigen Sie $\Phi_{\text{tot}} = \Phi_{\text{ext}} + \Phi_{\text{ind}}$, $e\delta n(\boldsymbol{q}, \omega) \;=\; \chi(\boldsymbol{q}, \omega)\Phi_{\text{tot}}(\boldsymbol{q}, \omega)$, und die Fouriertransformation der Laplace Gleichung $\Delta\Phi_{\text{ind}}(\boldsymbol{r}) = -e\,\delta n(\boldsymbol{r})\,/\epsilon_0$.

(b) Stoner-Kontinuum
Für welche Werte von ω und $|\boldsymbol{q}|$ divergiert χ? Was bedeutet dies für Φ_{tot}?

(c) Plasmonen
Zeigen Sie, dass die Dielektrizitätskonstante ϵ im Limes $\boldsymbol{q} \to 0$ gegeben ist durch

$$\epsilon(\boldsymbol{q} \to 0, \omega) = 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}\,, \tag{7}$$

mit $\omega_P = \sqrt{n\,e^2/(m\epsilon_0)}$. Wie heißt die Frequenz ω_P? Was bedeutet $\omega \to \omega_P$ für Φ_{tot}?

(empfohlender Rechenweg: spalten Sie den Bruch in Gleichung 5, verschieben Sie die $\boldsymbol{k}$ Summation, bilden Sie wieder den Hauptnenner, und entwickeln Sie dann in $\boldsymbol{q}$ bis zur quadratischen Ordnung.)

(d) Thomas-Fermi-Abschirmung

(d.1) Zeigen Sie, dass die Dielektrizitätskonstante ϵ für $\omega = 0$ und kleinen $\boldsymbol{q} \ll \boldsymbol{k}_F$ gegeben ist durch

$$\epsilon(\boldsymbol{q}, \omega = 0) = 1 + \frac{k_{\text{TF}}^2}{\boldsymbol{q}^2}\,, \tag{8}$$

mit der Thomas-Fermi Wellenzahl $k_{\text{TF}}^2 = e^2 D(\varepsilon_F)/\epsilon_0$, die eine Funktion der Zustandsdichte $D(\varepsilon)$ ist.

(d.2) Eine Punktladung im Elektronengas erzeugt ein Potential $\Phi_{\text{ext}} = Q/|\boldsymbol{r}|$. Berechnen Sie das Potential $\Phi_{\text{tot}}(\boldsymbol{r})$.
(Tip: Fouriertransformieren Sie $\Phi_{\text{ext}}(\boldsymbol{r}) = Q\,e^{-\gamma r}/r$, und bilden Sie den Limes $\gamma \to 0$.)

Je nach Lösungsweg könnten folgende Relationen hilfreich sein.

$$\int d\boldsymbol{k} e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} = (2\pi)^3 \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$$

$$\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = \frac{1}{r_0^2 \sin\vartheta} \delta(r - r_0)\delta(\vartheta - \vartheta_0)\delta(\phi - \phi_0)$$

$$\varepsilon_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}} \approx \varepsilon_{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{q} = \varepsilon_{\boldsymbol{k}} + |\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{k}}|\,|\boldsymbol{q}| \cos\vartheta$$

$$F(\boldsymbol{k}) = \int d\boldsymbol{x} e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} F(\boldsymbol{x}), \quad F(\boldsymbol{x}) = 1/(2\pi)^3 \int d\boldsymbol{k} e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} F(\boldsymbol{k})$$

$$2/V \sum_{\boldsymbol{k}} \ldots = \int d\varepsilon\, D(\varepsilon) \ldots$$

$$\sum_{\boldsymbol{k}} \ldots = V/(2\pi)^3 \int d\boldsymbol{k}$$