Theoretische Festkörperphysik II

SS06, **160303**

Dozent: Jürgen König   Übungen: B. Kubala und M. Braun

Übungsblatt 4

Besprechung: Mittwoch, den 05.07.06; 16:00 in NB 6/73

Aufgabe 8 : Bogoljubow-Transformation

Der effektive Hamilton Operator

$$H = \varepsilon\, a^\dagger a + \varepsilon\, b^\dagger b - \Delta ba - \Delta^\star a^\dagger b^\dagger \tag{1}$$

enthält Fermionen in zwei Zuständen a und b, d.h. $\{a, b\} = 0$, $\{a^\dagger, a\} = 1$ usw. Er soll diagonalisiert werden mit der unitären Transformation

$$\alpha^\dagger = u^\star a^\dagger - vb \qquad \text{und} \qquad \beta^\dagger = u^\star b^\dagger + va \tag{2}$$

(a) Auch α und β sollen Fermionen sein. Zeigen Sie, dass daraus $|u|^2 + |v|^2 = 1$ folgt.

(b) Um ihr Wissen über lineare Algebra zu benutzen, schreiben Sie den Hamiltonoperator in die Matrixdarstellung

$$H = [a^\dagger, b] \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon & -\Delta^\star \\ -\Delta & -\varepsilon \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b^\dagger \end{bmatrix} + \text{const.} \tag{3}$$

um, und bestimmen Sie den konstanten Term.

(c) Diagonalisieren Sie den Hamiltonoperator, und finden Sie die normierte Eigenbasis.
Tips: Versuchen Sie u reell zu wählen, und definieren Sie gegebenenfalls $\Delta = |\Delta| \cdot e^{i\phi}$.

Aufgabe 9 : Supraleitender Ring

Die Grundlage der Ginzburg-Landau Theorie besteht in der Annahme, dass ein supraleitendes Konsendat mittels einer makroskopischen Wellenfunktion $\Psi(\vec{r})$ beschrieben werden kann. Betrachten wir einen dünnen supraleitenden Ring mit Radius r in einem magnetischen Vektorpotential $\boldsymbol{A} = A\hat{\mathrm{e}}_\phi$. Die Wellenfunktion des Kondensates in Zylinerkoordinaten ist in diesem Fall gegeben durch

$$\Psi(\phi) = \Psi_0\, e^{in\phi}, \tag{4}$$

wobei Ψ_0 (=Dichte des Kondensates) innerhalb des Ringes konstant ist, und ausserhalb des Ringes verschwindet.

(a) Warum kann n nur die Werte $n = 0, \pm 1, \pm 2....$ annehmen?

(b) Berechnen Sie den supraleitenden Strom im Ring mittels

$$\boldsymbol{J}_s = \frac{e^\star \hbar}{2m^\star i}(\Psi^\dagger \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^\dagger) - \frac{e^{\star 2}}{m^\star}\Psi\Psi^\dagger \boldsymbol{A} \tag{5}$$

(c) Die Wellenfunktion erfüllt die Schrödinger Gleichung

$$E\,\Psi = \frac{1}{2m^\star}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - e^\star \mathbf{A}\right)^2 \Psi \tag{6}$$

Ausgehend von der Bedingung, dass das Konsensat immer den niedrigst möglichen Energieeigenzustand wählt, skizieren Sie n als Funktion des magnetischen Flusses $\Phi = \int \boldsymbol{B} d\boldsymbol{a}$ durch den Ring. Tip: Satz von Stokes.

Aufgabe 10: Ein Vortex im Supraleiter

Betrachten wir einen unendlich ausgedehnten Supraleiter mit der Wellenfunktion

$$\Psi(r, \phi, z) = \Psi_0 \, e^{in\phi}, \tag{7}$$

ohne äusseres magnetisches Feld.

(a) Warum kann die konstante Kondensatsdichte bei $r = 0$ eigentlich nicht stimmen?

(b) Berechnen und zeichnen die das Stromvektorfeld $\boldsymbol{J}_s$.

(c) Zeigen Sie, dass ausserhalb des Vortexkerns $\nabla \times \boldsymbol{J}_s \propto \boldsymbol{B} = 0$.

(d) Zeigen Sie unter Mithilfe des Satzes von Stokes, dass sich ein Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ im Kern des Vortex befindet.

(e) Verständnissfragen zu topologischen Defekten

(e.1) Überlegen Sie sich, dass ein $n = 1$ Vortex stabil ist, wenn es hinreichend viel Energie kostet, die Dichte des supraleitenden Kondensates zu ändern.

(e.2) Zeigen Sie anhand des Stromvektorfeldes, dass sich zwei $n = 1$ Vortices zu einem $n = 2$ Vortex addieren können.

(e.3) Da ein $n = 2$ Vortex in zwei $n = 1$ Vortices zerfallen kann, warum sind nur $n = 1$ Vortices beobachtbar?