Dozent: Prof. Dr. G. Burkard
Übungen: M. Braun & T. Barthel
SS07, Nr. **07ss-17572**

Quantentheorie II

Übungsblatt 1

Abgabe: Mittwoch, 18.04.07
Besprechung: Donnerstag, 19.04.07, 14:00 in 26C402

Aufgabe 1 : Der harmonische Oszillator *(6 Punkte)*
Der Oszillator ist beschrieben durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\,\omega^2\,\hat{x}^2$$

Zur Lösung dieses Hamiltonian definieren wir folgende Hilfs-Operatoren

$$\hat{a} = \frac{m\,\omega\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \qquad \hat{a}^\dagger = \frac{m\,\omega\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \tag{1}$$

(a) Der Kommutator ist definiert als $[A, B] = AB - BA$. Zeigen Sie die Vertauschungsrelationen

$$[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = [\hat{a}, \hat{a}] = 0 \quad \text{und} \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \tag{2}$$

(b) Schreiben sie den Hamiltonoperator um in $\quad \hat{H} = \hbar\omega(\hat{N} + \frac{1}{2}) \quad$ mit $\quad \hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$

(c) Überprüfen sie die Operatoridentitäten

$$[\hat{a}, \hat{N}] = \hat{a} \qquad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger \tag{3}$$

(d) Der Operator $\hat{N}$ (und damit auch $\hat{H}$) besitzt die Eigenvektoren $|n\rangle$, sodass $\hat{N}|n\rangle = n\,|n\rangle$ mit den Eigenwerten $n = 0, 1, 2....$ Folgern Sie aus Gleichung (3), dass

$$\hat{a}|n\rangle = c|n-1\rangle \tag{4}$$

mit einer Konstanten c. Bestimmen sie diese Konstante mit Hilfe der Normierung der Eigenvektoren.

(e) Zeigen Sie analog $\quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$

Aufgabe 2 : Bosonisierung des Spins *(6 Punkte)*
Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ erfüllen die bosonischen Vertauschungsrelationen $[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = [\hat{a}, \hat{a}] = 0$ und $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Operatoren die Drehimpulsalgebra in der Form $[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm\hbar\hat{L}_\pm$ und $[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar\hat{L}_z$ erfüllen:

$$\hat{L}_z = \hbar(\ell - \hat{a}^\dagger\hat{a}) \qquad \hat{L}_+ = \hbar\sqrt{2\ell - \hat{a}^\dagger\hat{a}}\,\cdot\,\hat{a} \qquad \hat{L}_- = \hbar\hat{a}^\dagger\,\sqrt{2\ell - \hat{a}^\dagger\hat{a}} \tag{5}$$

(b) Berechnen Sie $\hat{\boldsymbol{L}}^2$, und interpretieren sie die Variable ℓ

(c) Physikalischer Kontext: Angenommen, man würde so einen Ferromagneten als großen Spin beschreiben. Welche Quasiteilchen würden von den Operatoren a und $a^\dagger$ erzeugt/vernichtet? Erhöhen oder verringern diese Quasiteilchen die Magnetisierung?

Anmerkung: Diese Darstellung der Drehimpulsoperatoren geht auf T. Holstein und H. Primakoff zurück, zu finden in Phys. Rev. **58** 1098 (1940).

Aufgabe 3 : Fermionische Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren *(5 Punkte)*
Ein antisymmetrisierter fermionischer Basiszustand lässt sich ausdrücken als

$$|n_1, n_2, \ldots\rangle \;=\; (\hat{c}_1^\dagger)^{n_1}(\hat{c}_2^\dagger)^{n_2}\ldots|0\rangle \quad n_i \in \{0,1\}\,,$$

wobei das fermionische Vakuum $|0\rangle$ definiert ist durch $\hat{c}_i|0\rangle \;=\; 0\,\forall\; i$, und die fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren die folgenden Antivertauschungsrelationen erfüllen

$$\{\hat{c}_i, \hat{c}_j^\dagger\} \;=\; \delta_{i,j} \qquad \text{und} \qquad \{\hat{c}_i, \hat{c}_j\} \;=\; \{\hat{c}_i^\dagger, \hat{c}_j^\dagger\} \;=\; 0\,. \tag{6}$$

(a) Folgern Sie zunächst aus den Vertauschungsrelationen, dass $n_i \in \{0,1\}$. Wie nennt man diese Eigenschaft?

(b) Überprüfen Sie die folgenden Resultate:

$$\begin{aligned}
\hat{c}_i|n_1, n_2, \ldots\rangle &= (-1)^{Z_i}\delta_{n_i,1}|n_1, n_2, \ldots, n_i - 1, \ldots\rangle\,,\\
\hat{c}_i^\dagger|n_1, n_2, \ldots\rangle &= (-1)^{Z_i}\delta_{n_i,0}|n_1, n_2, \ldots, n_i + 1, \ldots\rangle
\end{aligned}$$

wobei $Z_i = \sum_{r=1}^{i-1} n_r$ ist.

(c) Die fermionischen Anzahloperatoren sind gegeben durch $\hat{N}_i \;=\; \hat{c}_i^\dagger\hat{c}_i$. Zeigen Sie durch die Vertauschungsrelationen in Gleichung (6), dass

(c.1) $\hat{N}_i|n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots\rangle = n_i|n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots\rangle$

(c.2) $[\hat{N}_i, \hat{c}_j] = -\hat{c}_j\delta_{ij}$ und $[\hat{N}_i, \hat{c}_j^\dagger] = +\hat{c}_j^\dagger\delta_{ij}$

(c.3) $[\hat{N}_i, \hat{N}_j] = 0$ und $\hat{N}_\alpha\hat{N}_\alpha = \hat{N}_\alpha$

Anmerkung: Der Antikommutator $\{A, B\} \;=\; AB + BA$ wird in der Literatur auch manchmal in Anlehnung an den Kommutator als $[\ldots,\ldots]_+$ geschrieben.

Aufgabe 4 : Fermionische Teilchenzahldarstellung eines Operators / einer Matrix *(3 Punkte)*
Für eine komplexe $n \times n$ Matrix t definieren wir

$$A(t) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \hat{c}_\alpha^\dagger\, t_{\alpha\beta}\, \hat{c}_\beta \tag{7}$$

(a) Leiten Sie zuerst die Relation $[X, YZ] = \{X, Y\}Z - Y\{X, Z\}$ her.

(b) Zeigen Sie dann, dass $[A(s), A(t)] = A([s,t])$

(c) Benutzen Sie obrige Ergebnisse, um zu bestätigen, dass der Spin-1/2-Operator in Teilchenzahldarstellung

$$\hat{S}_a = \frac{\hbar}{2}\sum_{i,j} \hat{c}_i^\dagger \sigma_{i,j}^a \hat{c}_j \qquad\qquad a \in \{x, y, z\} \tag{8}$$

mit den Pauli-Matrizen σ^a, die Drehimpulsalgebra $[\hat{S}_a, \hat{S}_b] \;=\; i\hbar\epsilon^{abc}\hat{S}_c$ erfüllt. Der Wert des Levi-Civita Symbols ist gegeben durch $\epsilon^{xyz} = +1$ sowie für alle zyklischen Vertauschungen der Indizes, und $\epsilon^{zyx} = -1$ für alle antizyklischen Vertauschungen.
Tip: Sie können vorraussetzen, dass die Pauli-Matrizen selbst die Drehimpulsalgebra erfüllen.