Quantentheorie II

Übungsblatt 2

Abgabe: Mittwoch, 25.04.07
Besprechung: Donnerstag, 26.04.07, 14:00 in 26C402

Aufgabe 5 : (Anti-)Symmetrische Vielteilchenzustände *(6 Punkte)*
Manchmal ist es notwendig, eigentlich ununterscheidbare Teilchen mit einem Index zu versehen. Dieser unphysikalische Index darf allerdings nie eine physikalisch messbare Grösse beeinflussen. Diese Forderung wird dadurch erfüllt, dass der (fermionische) bosonische Vielteilchenzustand (anti-)symmetrisiert wird.
Im Folgenden schreiben wir $|a\rangle_i$ für das Teilchen i, dass sich im Einteilchenzustand a (Orthonormalbasis) befindet. Für zwei fermionische Teilchen ($i = 1, 2$) in zwei möglichen Zuständen (a, b) ergibt sich damit der antisymmetrisierte Zustand

$$|\psi\rangle_a = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|a\rangle_1|b\rangle_2 - |a\rangle_2|b\rangle_1\big) \tag{1}$$

bzw. in Teilchenzahldarstellung (zweite Quantisierung) $|\psi\rangle_a = c_a^\dagger c_b^\dagger|0\rangle = |n_a = 1, n_b = 1\rangle \equiv |1, 1\rangle$.

(a) Zeigen Sie, dass der Zustand $|\psi\rangle_a$ antisymmetrisch ist unter Vertauschung der zwei Teilchen, sowie dass er normiert ist.

(b) Nehmen wir nun an, die Teilchen a und b seien Bosonen: Geben Sie die 3 möglichen Zweiteilchenzustände an, sowohl in Produktdarstellung wie auch in Teilchenzahldarstellung.

(c) Betrachten wir nun zwei Teilchen $(1, 2)$ in drei möglichen Zuständen (a, b, c). Konstruieren sie alle Zweiteilchenzustände für den Fall von bosonischen und fermionischen Teilchen.

Aufgabe 6 : Das Helium-Atom *(9 Punkte)*
Das Helium-Atom besitzt zwei Elektronen $i \in \{1, 2\}$ in den Orbitalen s und p (Wir vernachlässigen energetisch höhere Orbitale, sowie die Entartung des p-Orbitals). Der Zustand des i-ten Elektrons ist gegeben durch $|\alpha, \sigma\rangle_i = |\alpha\rangle_i|\sigma\rangle_i$, wobei $\alpha \in \{s, p\}$ das Orbital, und $\sigma \in \{\uparrow, \downarrow\}$ den Spinfreiheitsgrad bezeichnet.

(a) Konstruieren Sie den erlaubten Zweiteilchenzustand, in dem beide Elektronen sich im s-Orbital befinden. Ersetzen Sie dafür in Gleichung 15 den Zustand $|a\rangle_i$ mit den entsprechenden Zustand $|\alpha\rangle_i|\sigma\rangle_i$ ect., und testen Sie die verschiedenen möglichen Spin-kombinationen der Elektronen.

(b) Für den Fall, dass sich ein Elektron im Zustand s, und eines im Zustand p befindet, erzeugen Sie die 4 erlaubten antisymmetrischen Zustände wiederum mittels Gleichung 15.

(c) Erraten Sie eine Basistransformation, sodass man die 4 Zustände jeweils als ein Produkt aus Gesamtspin- und Gesamtorbital-zustand $f(|\sigma\rangle_1, |\sigma'\rangle_2) \cdot g(|\alpha\rangle_1, |\alpha'\rangle_2)$ schreiben kann.

(d) Klassifizieren Sie diese neuen Zustände bezüglich ihres z-Spins $\hat{s}_z = \hat{s}_{1,z} + \hat{s}_{2,z}$ und ihres Gesamtspins $|\hat{\boldsymbol{s}}|^2 = |\hat{\boldsymbol{s}}_1 + \hat{\boldsymbol{s}}_2|^2$.
Tip: $|\hat{\boldsymbol{s}}|^2 = \hat{s}_+\hat{s}_- - \hbar\hat{s}_z + \hat{s}_z^2 = \hat{s}_-\hat{s}_+ + \hbar\hat{s}_z + \hat{s}_z^2$.

Aufgabe 7 : Basiswechsel in zweiter Quantisierung *(5 Punkte)*

Die Einteilchen-basiszustände $|\psi_\mu\rangle$ werden durch die lineare Transformation in die neuen Basiszustände $|\tilde{\psi}_\nu\rangle$ transformiert (jeweils Orthonormalbasen)

$$|\tilde{\psi}_\mu\rangle = \sum_\nu |\psi_\nu\rangle\langle\psi_\nu|\tilde{\psi}_\mu\rangle \tag{2}$$

Die Transformationsregeln für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren der $a^\dagger_\mu$ und a_μ der Einteilchen-Zustände $|\psi_\mu\rangle$ sind analog

$$\hat{b}^\dagger_\mu = \sum_\nu \langle\tilde{\psi}_\mu|\psi_\nu\rangle^\star \hat{a}^\dagger_\nu \qquad \hat{b}_\mu = \sum_\nu \langle\tilde{\psi}_\mu|\psi_\nu\rangle \hat{a}_\nu \tag{3}$$

(a) Zeigen Sie, dass wenn $\hat{a}^\dagger_\nu$ und $\hat{a}_\nu$ die (Anti-)Kommutatorrelation für Fermionen/Bosonen erfüllen, dann erfüllen $\hat{b}^\dagger_\mu$ und $\hat{b}_\mu$ dieselbe Relation.

(b) Beweisen Sie, dass die Zahl der Teilchen (wie alle messbaren Grössen) invariant unter einer Basistransformation ist, also dass gilt

$$\sum_\mu \hat{b}^\dagger_\mu \hat{b}_\mu = \sum_\nu \hat{a}^\dagger_\nu \hat{a}_\nu \tag{4}$$

(c) Wichtiger Spezialfall: Feldoperatoren.
Bisher betrachteten wir immer Eigenzustände mit diskreten Quantenzahlen. Für manche Probleme ist die Basis der Ortseigenzustände jedoch hilfreich, und der Ort ist eine kontinuierliche Variable. Die sogenannten Feldoperatoren $\hat{\psi}^\dagger(x)$ und $\hat{\psi}(x)$ die ein Teilchen am Ort x erzeugen bzw. vernichten sind gegeben durch die Basistransformation

$$\hat{\psi}^\dagger(x) \;=\; \sum_\nu \langle x|\psi_\nu\rangle^\star \hat{a}^\dagger_\nu \;=\; \sum_\nu \phi^\star_\nu(x)\hat{a}^\dagger_\nu \qquad \hat{\psi}(x) \;=\; \sum_\nu \langle x|\psi_\nu\rangle \hat{a}_\nu \;=\; \sum_\nu \phi_\nu(x)\hat{a}_\nu \tag{5}$$

Die Koeffizienten $\phi_\nu(x)$ sind direkt die (aus QT I bekannten) Ortswellenfunktion des entsprechenden Orbitales ν.
Zeigen Sie, dass die Vertauschungsrelationen fermionischer Feldoperatoren gegeben ist durch

$$\{\psi(x), \psi(x')\} = 0, \quad \{\psi^\dagger(x), \psi^\dagger(x')\} = 0, \qquad \{\psi(x), \psi^\dagger(x')\} = \delta(x - x') \tag{6}$$

und analog für bosonische Feldoperatoren. (Rechnungen sind jeweils 1-Zeiler)