RWTH AACHEN

Dozent: Prof. Dr. G. Burkard
Übungen: M. Braun & T. Barthel
SS07, Nr. **07ss-17572**

Quantentheorie II

Übungsblatt 3

Abgabe: Mittwoch, 02.05.07
Besprechung: Donnerstag, 03.05.07, 14:00 in 26C402

Aufgabe 8 : Bosonische und fermionische kohärente Zustände *(5 Punkte)*

(a) Betrachten wir ein bosonisches System mit M Freiheitsgraden.

(a.1) Zeigen Sie, dass der Zustand $|\phi\rangle = e^{\sum_{i=1}^{M} \phi_i a_i^\dagger}|0\rangle$ ein Eigenzustand eines jeden Vernichtungsoperators $a_j|\phi\rangle = \phi_j|\phi\rangle$ mit dem Eigenwert ϕ_j ist.

(a.2) Ein adjungierter Zustand ist gegeben durch $\langle\Psi| = \langle 0|e^{\sum_j \psi_j^\star a_j}$. Bestimmen Sie den Überlapp zweier kohärenten Zustände $\langle\psi|\phi\rangle$.

(a.3) Holomorphe Darstellung: Zeigen Sie, dass die Wirkung der Leiteroperatoren auf den kohärenten Zustand $\langle\phi|$ gegeben ist durch

$$\langle\phi|a_j|\chi\rangle = \frac{\partial}{\partial\phi_j^\star}\langle\phi|\chi\rangle \qquad\qquad \langle\phi|a_j^\dagger|\chi\rangle = \phi_j^\star\langle\phi|\chi\rangle \tag{1}$$

Welche Vertauschungsrelation erfüllen $\phi_j^\star$ und $\dfrac{\partial}{\partial\phi_j^\star}$?

(b) Betrachten wir einen einzelnen fermionischen Freiheitsgrad. Um einen kohärenten Zuständ zu konstruieren brauchen wir die sogenannten Grassman-Variablen. Dies sind Zahlen, die mit sich selbst, und mit fermionischen Operatoren antikommutieren, also
$\{\xi,\xi\} = 0$, $\{\xi, c\} = 0$, und $\{\xi, c^\dagger\} = 0$.

(b.1) Überprüfen Sie, dass der Zustand $|\xi\rangle = e^{-\xi\, c^\dagger}|0\rangle$ KEIN Eigenzustand des Vernichtungsoperators c ist, wenn ξ eine einfache komplexe Zahl ist.

(b.2) Überlegen Sie sich zuerst, warum jede Funktion einer Grassman-Variablen linear ist: $f(\xi) = f_0 + f_1\xi$.

(b.3) Zeigen Sie nun, dass wenn ξ eine Grassman-variable ist, dann ist $|\xi\rangle = e^{-\xi\, c^\dagger}|0\rangle$ ein kohärenter Zustand.

Aufgabe 9 : Mittlere thermische Besetzung eines Zustandes *(7 Punkte)*

Gegeben sei ein einzelner Zustand der mit der Zahl n bosonischer Teilchen/Moden bestetzt werden kann. Jedes Teilchen in dem Zustand besitzt die Energie $\hbar\omega$. Nun soll dieser Zustand Teilchen (und damit Energie) mit einem Reservoir (Temperatur T, chemisches Potential μ) austauschen können. Bestimmen Sie die mittlere thermische Besetzungszahl $\langle n\rangle_{\text{th}}$ des Zustandes wie folgt

(a) Berechnen Sie mit dem Zähloperator $\hat{N} = a^\dagger a$ und dem Hamiltonoperator $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{N} + \frac{1}{2})$ die Zustandssumme

$$Z = \mathrm{Tr}[e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}] = \sum_{n=0}^{\infty}\langle n|\, e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}\,|n\rangle \tag{2}$$

(b) Geben Sie das grosskanonische Potential $\Omega = -\dfrac{1}{\beta}\ln Z$ an.

(c) Die thermische Besetzung ist dann gegeben durch $\langle n\rangle_{\text{th}} = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial\mu}$.

(d) Wiederholen Sie die Rechnung für fermionische Teilchen.

Aufgabe 10 : Coulomb Wechselwirkung im Impulsraum *(8 Punkte)*

Die elektrostatische Wechselwirkung zwischen den Elektronen in einem Vileteilchenzustand ist gegeben durch

$$H_{\text{el}-\text{el}} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma\sigma'} \int d\boldsymbol{x} \int d\boldsymbol{x}' \;\; \hat{\psi}^{\dagger}_{\sigma}(\boldsymbol{x})\hat{\psi}^{\dagger}_{\sigma'}(\boldsymbol{x}')\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\hat{\psi}_{\sigma'}(\boldsymbol{x}')\hat{\psi}_{\sigma}(\boldsymbol{x})\,. \tag{3}$$

Beschränken wir uns auf ein homogenen Fermigas, und wählen ebene Wellen als Basisfunktionen. Die Feldoperatoren sind dann gegeben durch $\hat{\Psi}^{\dagger}_{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k}} e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\sigma'}$, wobei $a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\sigma}$ der Erzeugungsoperator eines Elektrons mit Impuls $\boldsymbol{k}$ und Spin σ ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Coulomb-Wechselwirkung in der Darstellung von Erzeugern und Vernichtern folgende Form annehmen kann

$$H_{\text{el}-\text{el}} = \frac{1}{2V}\sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'\boldsymbol{q},\sigma\sigma'} V(\boldsymbol{q})\, a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\sigma} a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q},\sigma'} a_{\boldsymbol{k}',\sigma'} a_{\boldsymbol{k},\sigma} \tag{4}$$

mit $V(\boldsymbol{q}) = e^2/(\varepsilon_0 q^2)$.
Tip: Um die Fourier-Transformation von $1/|\boldsymbol{x}|$ zu berechen, führen sie den Konvergenzfaktor $e^{-\mu|\boldsymbol{x}|}$ ein, und bilden Sie nach der Ausführung des Integrals den Limes $\lim_{\mu\to 0}$.

(b) Für $q = 0$ divergiert $V(\boldsymbol{q})$. Zeigen Sie, dass in Metallen mit Volumen V diese Divergenz durch die Existenz der Anzahl N Elektronen und der gleichen Anzahl N positiv geladenen Ionen kompensiert wird.

(b.1) Berechnen Sie dafür die Wechselwirkung des Ionenintergrundes

$$H_{\text{Ion}-\text{Ion}} = \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\int d\boldsymbol{x} \int d\boldsymbol{x}' \;\; \frac{n(\boldsymbol{x})n(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}e^{-\mu|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = \frac{1}{2\varepsilon_0}e^2\frac{N^2}{V}\frac{1}{\mu^2} \tag{5}$$

mit der homogenen Ionendichte $n(\boldsymbol{x}) = N/V$.

(b.2) Überprüfen Sie, dass die Elektron-Ion Wechselwirkung

$$H_{\text{Ion}-\text{el}} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\int d\boldsymbol{x} \;\; \frac{n(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i|}e^{-\mu|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i|}\,, \tag{6}$$

wobei $\boldsymbol{x}_i$ den Ort des i-ten Elektrons kennzeichnet, gleich minus zwei mal die Wechselwirkungsenergie zwischen den Ionen ist. Diskutieren Sie die Existenz des Faktors 2.

(b.3) Bestätigen Sie, dass die Elektron-Elektron Wechselwirkungsenergie für $\boldsymbol{q} = 0$ gegeben ist durch

$$H_{\text{el}-\text{el}} = \frac{1}{2\varepsilon_0}e^2\frac{1}{\mu^2}\frac{N^2-N}{V}\,. \tag{7}$$

Nach addition aller drei Terme, und dem thermodynamischen Limes $N\cdot V\to\infty$ verschwinden die $\boldsymbol{q} = 0$ Energiebeiträge (für beliebiges μ).

Je nach Lösungsweg könnten folgende Relationen hilfreich sein.

$$\int d\boldsymbol{x} = V$$

$$\int d\boldsymbol{x} e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} = V\delta_{\boldsymbol{k},0} \;\; \text{falls } \boldsymbol{k} \text{ diskret.}$$