Dozent: Prof. Dr. G. Burkard
Übungen: M. Braun & T. Barthel
SS07, Nr. **07ss-17572**

Quantentheorie II

Übungsblatt 4

Abgabe: Mittwoch, 09.05.07
Besprechung: Donnerstag, 10.05.07, 14:00 in 26C402

Aufgabe 11 : Diagonalisierung eines Hamiltonians *(8 Punkte)*
Der effektive Hamilton-Operator

$$H = \varepsilon\, a^\dagger a + \varepsilon\, b^\dagger b - \Delta^\star ba - \Delta a^\dagger b^\dagger \tag{1}$$

enthält Fermionen in zwei Zuständen/Moden a und b, d.h. $\{a,b\} = 0$, $\{a^\dagger, a\} = 1$ usw. Er soll im folgenden diagonalisiert werden.

(a) Schreiben Sie den Hamiltonoperator in die Matrixdarstellung

$$H = [a^\dagger, b] \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon & -\Delta \\ -\Delta^\star & -\varepsilon \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b^\dagger \end{bmatrix} + \text{const.} \tag{2}$$

um, und bestimmen Sie den konstanten Term.

(b) Die Transformation

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & -v \\ v^\star & u^\star \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b^\dagger \end{bmatrix} \qquad \text{oder} \qquad \alpha = ua - vb^\dagger \quad \text{und} \quad \beta^\dagger = u^\star b^\dagger + v^\star a \tag{3}$$

verknüpft die Fermion-Operatoren $a^{(\dagger)}$ und $b^{(\dagger)}$ mit neuen Operatoren $\alpha^{(\dagger)}$ und $\beta^{(\dagger)}$. Wenn diese neuen Operatoren auch Fermionen beschreiben sollen, warum folgt daraus die Bedingung $|u|^2 + |v|^2 = 1$?

(c) Wie sieht die inverse Transformationsmatrix aus?

(d) Diagonalisieren Sie den Hamiltonoperator, finden Sie die Eigenwerte und die (komplexen) Koeffizienten u und v. Tips: Versuchen Sie u reell zu wählen, und definieren Sie gegebenenfalls $\Delta = |\Delta| \cdot e^{i\phi}$.

(e) Zeigen Sie, dass der diagonalisierte Hamiltonoperator gegeben ist durch

$$H = \sqrt{\varepsilon^2 + |\Delta|^2}\, \left(\alpha^\dagger \alpha + \beta^\dagger \beta + \text{const}\right) \tag{4}$$

bitte wenden

Aufgabe 12 : Mean-Field Theorie der Supraleitung *(4 Punkte)*
Ein BCS-Supraleiter ist beschrieben durch den Hamiltonian

$$H = \sum_{\boldsymbol{k},\sigma} \epsilon_{\boldsymbol{k}} c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma} c_{\boldsymbol{k}\sigma} + \sum_{\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{l}} V_{\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{l}} c^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow} c_{-\boldsymbol{l}\downarrow} c_{\boldsymbol{l}\uparrow} \tag{5}$$

Zur Vereinfachung des Problems erwartet man, dass der Eigenwert der Operatoren $C^\dagger_{\boldsymbol{k}} = c^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}$ und $C_{\boldsymbol{k}} = c_{-\boldsymbol{k}\downarrow} c_{\boldsymbol{k}\uparrow}$ nahe am thermodynamischen Erwartungswert liegt. Deshalb ersetzt man im Welchselwirkungsteil in Gleichung 5 die Operatoren durch deren Mittelwert $\langle C^\dagger_{\boldsymbol{k}} \rangle$ und $\langle C_{\boldsymbol{k}} \rangle$ plus die Fluktuationen um den Mittelwert $\delta C_{\boldsymbol{k}} = C_{\boldsymbol{k}} - \langle C_{\boldsymbol{k}} \rangle$ und $\delta C^\dagger_{\boldsymbol{k}} = C^\dagger_{\boldsymbol{k}} - \langle C^\dagger_{\boldsymbol{k}} \rangle$.

(a) Zeigen Sie, dass die Operatoren $C^\dagger_{\boldsymbol{k}}$ und $C_{\boldsymbol{k}}$ für kleine Teilchendichten einen bosonischen Charakter erhalten.

(b) Entwickeln Sie den Hamiltonian in Gleichung 5 bis zur ersten Ordnung in den Fluktuationen $\delta C^{(\dagger)}_{\boldsymbol{k}}$. Überprüfen Sie, dass der daraus entstehende "mean-field"-Hamiltonian gegeben ist durch

$$H_{\mathrm{mf}} = \sum_{\boldsymbol{k},\sigma} \epsilon_{\boldsymbol{k}} c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma} c_{\boldsymbol{k}\sigma} - \sum_{\boldsymbol{k}} \left[\, \Delta_{\boldsymbol{k}} c^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow} + \Delta^\star_{\boldsymbol{k}} c_{-\boldsymbol{k}\downarrow} c_{\boldsymbol{k}\uparrow} \, \right]. \tag{6}$$

plus einen konstanten Term. Bestimmen Sie $\Delta_{\boldsymbol{k}}$. Tip: Aus $H = H^\dagger$ folgt $V_{kl} = V^\star_{lk}$

Aufgabe 13 : Bogoliubov-Transformation in der Supraleitung *(8 Punkte)*
Der in der vorherigen Aufgabe berechnete "mean-field"-Hamiltonian kann diagonalisiert werden zu

$$H_{\mathrm{diag}} = \sum_{\boldsymbol{k}} E_{\boldsymbol{k}} \gamma^\dagger_{\boldsymbol{k}0} \gamma_{\boldsymbol{k}0} + E_{\boldsymbol{k}} \gamma^\dagger_{\boldsymbol{k}1} \gamma_{\boldsymbol{k}1} + \varepsilon_{\boldsymbol{k}} - E_{\boldsymbol{k}} \qquad \text{mit} \quad E_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{\epsilon^2_{\boldsymbol{k}} + |\Delta_{\boldsymbol{k}}|^2} \tag{7}$$

(a) Überprüfen Sie, dass diese Diagonalisierung mit der Transformation

$$\gamma_{\boldsymbol{k}0} = u_{\boldsymbol{k}}\, c_{\boldsymbol{k}\uparrow} - v_{\boldsymbol{k}}\, c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \qquad \text{und} \qquad \gamma^\dagger_{\boldsymbol{k}1} = u^\star_{\boldsymbol{k}}\, c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow} + v^\star_{\boldsymbol{k}}\, c_{\boldsymbol{k}\uparrow} \tag{8}$$

mit den Koeffizienten $u_k = \sqrt{(1 + \epsilon_{\boldsymbol{k}}/E_{\boldsymbol{k}})/2}$ und $v_k = e^{+i\phi}\sqrt{(1 - \epsilon_{\boldsymbol{k}}/E_{\boldsymbol{k}})/2}$ erreicht wurde, wobei $\Delta_{\boldsymbol{k}} = |\Delta_{\boldsymbol{k}}| e^{i\phi}$. Im allgemeinen gilt $\epsilon_{\boldsymbol{k}} = \epsilon_{-\boldsymbol{k}}$.

(b) Die neuen fermionischen Operatoren γ_0 und γ_1 beschrieben fermionische Anregungen des Supraleiters, die Bogoliubons genannt werden. Was ist die minimal benötigte Energie, um eine solche Anregung im Supraleiter zu erzeugen?

(c) Beweisen Sie, dass der Zustand

$$|\psi_G\rangle = \prod_{\boldsymbol{q}} (u_{\boldsymbol{q}} + v_{\boldsymbol{q}} c^\dagger_{\boldsymbol{q}\uparrow} c^\dagger_{-\boldsymbol{q}\downarrow}) |0\rangle \tag{9}$$

der Grundzustand des Systems ist, indem Sie zeigen, dass dieser Zustand keine Bogoliubon-Anregungen enthällt, also $\gamma_{\boldsymbol{k}0}|\psi_G\rangle = \gamma_{\boldsymbol{k}1}|\psi_G\rangle = 0$.