Dozent: Prof. Dr. G. Burkard
Übungen: M. Braun & T. Barthel
SS07, Nr. **07ss-17572**

# Quantentheorie II

## Übungsblatt 6

Abgabe: Mittwoch, 23.05.07
Besprechung: Donnerstag, 24.05.07, 14:00 in 26C402

**Aufgabe 18 :** nicht-relativistische Elektronen im Magnetfeld *(5 Punkte)*
Im niederenergetischen Grenzfall geht die Diracgleichung in Anwesentheit eines Magnetfeldes in die Schrödingergleichung

$$\mathbb{1} i\hbar \frac{d}{dt}\psi = \left[\frac{\mathbb{1}}{2m}\left(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}\right)^2 - \frac{e\hbar}{2m}\boldsymbol{\sigma B}\right]\psi \tag{1}$$

über, wobei $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$. Ferner ist $\boldsymbol{\sigma}$ der drei-komponentige Vektor aus den Paulimatritzen $\sigma_i$, und $\mathbb{1}$ die $2\times 2$ Einheitsmatrix. Im folgenden wählen wir das Vektorpotential $\boldsymbol{A} = (0, x|\boldsymbol{B}|, 0)$ (Landau-Eichung), und betrachten NUR eine Elektronbewegung transversal zum Magnetfeld, also $\partial_z\psi = 0$.

(a) Berechnen Sie das Magnetfeld $\boldsymbol{B}$.

(b) Verwenden Sie den Ansatz $\psi_{n,\sigma} = e^{-i\varepsilon_{n\sigma}\, t/\hbar}\, e^{-ik_y y}\, u_n(x)\, \phi_\sigma$ mit dem 2-komponentigen Spinor $\phi_+ = (1,0)^T$ und $\phi_- = (0,1)^T$, und bestimmen Sie die Eigenenergien von $u_n(x)$, indem Sie durch eine geeignete Koordinatentransformation das Problem auf den Harmonischen Oszillator zurückführen. Führen Sie die Zyklotronfrequenz $\omega = eB/m$ ein.

(c) Zeigen Sie das die Energieniveaus der Elektronen gegeben ist durch

$$\varepsilon_{n\sigma} = \hbar\omega(n + \frac{1}{2} - \sigma\frac{1}{2}) \tag{2}$$

(d) Bestimmen Sie die Zeemanenergie $\Delta E = \varepsilon_{n-} - \varepsilon_{n+}$ , und drücken Sie ihr Ergebnis durch das Bohr-Magneton $\mu_B = \hbar e/2m$ aus

**Aufgabe 19 :** relativistische Elektronen im Magnetfeld *(8 Punkte)*
Die Dirac-Gleichung im kräftefreien Fall ist gegeben durch

$$\left(-i\partial\!\!\!/ + \frac{mc}{\hbar}\right)\boldsymbol{\psi} = 0, \qquad [\,\text{mit} \quad \partial\!\!\!/ = \gamma^\nu\partial_\nu\,] \tag{3}$$

(a) Koppeln Sie Koppeln Sie das durch die Dirac-Gleichung beschriebene Elektron an ein Feld $A^\mu = (0, 0, Bx, 0)$ an.

(b) Zeigen Sie, dass unter Vernachlässigung der Bewegung in z-Richtung ($\partial_z\psi = 0$), die Diracgleichung (mit geeigneten Wellenfunktionsansatz ect., siehe Aufgabe 18) geschrieben werden kann als

$$\begin{bmatrix} E - mc^2 & 0 & 0 & ic\hbar\partial_x - icm\omega x \\ 0 & E - mc^2 & ic\hbar\partial_x + icm\omega x & 0 \\ 0 & -ic\hbar\partial_x + icm\omega x & -E - mc^2 & 0 \\ -ic\hbar\partial_x - icm\omega x & 0 & 0 & -E - mc^2 \end{bmatrix}\psi = 0\,. \tag{4}$$

(c) Bestimmen Sie die Eigenenergien der Spinoren welche die Form $\psi_+ = (\psi_1, 0, 0, \psi_4)$ bzw, $\psi_- = (0, \psi_2, \psi_3, 0)$ besitzen.

(d) Entwickeln Sie die Energien für den nichtrelativistischen Grenzfall

(e) Überlegen Sie sich grob, das im nichtrelativistischen Grenzfall, für positives E die Komponenten $\psi_1$ und $\psi_2$, und für negatives $E$ die Komponenten $\psi_3$ und $\psi_4$ den Spinor dominieren.

**Aufgabe 20 :** Spin / Helizität / Chiralität *(7 Punkte)*

Für relativistische Teilchen ist der Spinoperator $\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\Sigma}$ gegeben durch

$$\sigma_{ij} = \epsilon_{ijk}\Sigma^k \qquad \text{wobei} \qquad \sigma_{ij} = \sigma^{ij} = \frac{i}{2}[\gamma^i, \gamma^j] \qquad [\,\text{Epsilon-Tensor } \epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk}\,] \tag{5}$$

(a) Berechnen Sie die Komponenten von $\boldsymbol{\Sigma} = (\Sigma^x, \Sigma^y, \Sigma^z)$, sowie $(\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\Sigma})^2$.

(b) Im Gegensatz zum nichtrelativistischen Grenzfall kann der Spin eines sich frei bewegenden Elektrons nicht beliebig ausgerichtet sein, sondern nur parallel (Helizität +1), oder anitparallel (Helizität -1) zur Bewegungsrichtung. Der Helizitätsoperator ist gegeben durch

$$h(\hat{\boldsymbol{k}}) = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{k}} = \Sigma^i\, \hat{k}^i\,, \tag{6}$$

wobei $\hat{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$ den Einheitsvektor in Richtung der räumlichen Bewegung kennzeichnet. Zeigen Sie, dass falls die Diracgleichung durch die Wellenfunktion der Form $\psi(x) = e^{ikx}\psi(k)$ erfüllt wird, so wird sie auch durch $h(\hat{\boldsymbol{k}})\psi(x)$ erfüllt.

(c) Zeigen Sie, dass für masselose Fermionen der Helizitätsoperator gleich $\pm\gamma^5$ ist. Multiplizieren Sie dazu die Diracgleichung mit $\gamma^5\gamma^0 = -i\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

(d) Wegen dieser wichtigen Bedeutung von $\gamma^5$ wählt man manchmal auch einen anderen Satz von $\gamma$-Matritzen. Diese chirale Darstellung ist gegeben durch

$$\gamma^0_{ch} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^i_{ch} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Berechnen Sie $\gamma^5_{ch}$.

(e) Verständnisfrage: Warum kann eine Koordinatentransformation die Helizität eines Elektrons ändern, aber nicht die Helizität eines masselosen Teilchens?

Anmerkung: Wenn sich die physikalischen Eigenschaften eines Teilchens mit der Helizität ändern, so spricht man von Chiralität. So zeigt sich z.B. experimentell, dass nur Neutrinos mit negativer Helizität, d.h. mit Eigenwert $h(\hat{\boldsymbol{k}}) = -1$ existieren.

---

Standarddarstellung der $\gamma$-Matritzen.

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix}$$

Eventuell nützliche Eigenschaften

$\{\gamma^\nu, \gamma^\mu\} = 2g^{\nu\mu}\,\mathbb{1}$ daraus folgt z.B. $\gamma^1\gamma^2 = -\gamma^2\gamma^1$, $\gamma^1\gamma^1 = -\mathbb{1}$, $[\gamma^1, \gamma^2] = 2\gamma^1\gamma^2$

$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

$\sigma_i\sigma_j = i\epsilon^{ijk}\sigma_k + \mathbb{1}\delta_{i,j}$