Quantentheorie II

Übungsblatt 7

Abgabe: Mittwoch, 06.05.07
Besprechung: Donnerstag, 14.05.07, 14:00 in 26C402

Aufgabe 21 : Lösung der Dirac-Gleichung für freie Teilchen *(8 Punkte)*
Die Diracgleichung ist gegeben durch

$$(-ic\hbar\partial\!\!\!/ + mc^2)\psi = 0 \tag{1}$$

Zur Lösung der Diracgleichung wählen wir fogenden Ansatz

$$\psi_r^{(+)}(x) = u_r(k)e^{-ikx} \quad \text{positive-Energie-Lösungen} \tag{2}$$
$$\psi_r^{(-)}(x) = v_r(k)e^{+ikx} \quad \text{negative-Energie-Lösungen, mit } k^0 = |E|/\hbar c > 0 \tag{3}$$

wobei $r \in \{1,2\}$, und $\hbar k = p = (E/c, \boldsymbol{p})$. Man könnte die Diracgleichung direkt angehen, was jedoch im allgemeinen Fall mühsam ist. Eine technisch einfachere Möglichkeit, welche Eigenschaften der γ-Matrizen, sowie die Dispersion $E^2 = c^2\boldsymbol{p}^2 + m^2c^4$ geschickt ausnutzt, wird im folgenden vorgestellt.

(a) Bestimmen Sie die Wellenfunktionen für ein ruhendes Teilchen. Wählen Sie dabei die Spinoren $u_1(0) = (1,0,0,0)^T$, $u_2(0) = (0,1,0,0)^T$, $v_1(0) = (0,0,1,0)^T$ und $v_2(0) = (0,0,0,1)^T$.

(b) Zeigen Sie, dass $k\!\!\!/ \, k\!\!\!/ = k_\mu k^\mu$, und damit $(c\hbar k\!\!\!/ \pm mc^2)(c\hbar k\!\!\!/ \mp mc^2) = 0$

(c) Überzeugen Sie sich, dass aus dem Ergebnis der Aufgabe 21(b) folgt, dass die Spinoren $u_r(k)$ und $v_r(k)$ für endliche Impulse direkt gegeben sind durch

$$u_r(k) = \frac{+c\hbar k\!\!\!/ + mc^2}{N} u_r(0)\,, \qquad v_r(k) = \frac{-c\hbar k\!\!\!/ + mc^2}{N} v_r(0) \tag{4}$$

mit einer noch zu bestimmenden Normierung N.

(d) Um Gleichung 4 auszuwerten, und explizit die 4er-Spinoren für endliche Impulse zu bestimmen, schreiben Sie die 4er-Spinoren als

$$u_r(0) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\chi}_r \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_r(0) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\chi}_r \end{pmatrix} \tag{5}$$

mit $\boldsymbol{\chi}_1 = (1,0)^T$, $\boldsymbol{\chi}_2 = (0,1)^T$ und $\boldsymbol{0} = (0,0)^T$, und rechnen Sie so mit 2×2-Matrizen. Verwenden Sie die Standartdarstellung der γ-Matrizen, siehe vorheriges Übungsblatt.

(e) Die Normierung soll so gewählt werden, dass die Spinoren $u_r(k)$ und $v_r(k)$ orthonormal sind, also dass gilt

$$\bar{u}_r(k)u_s(k) = \delta_{rs}, \quad \bar{v}_r(k)v_s(k) = -\delta_{rs}, \qquad \bar{u}_r(k)v_s(k) = 0. \tag{6}$$

Tip: Demonstrieren Sie dass $\bar{u}_r(k) = u_r^\dagger(k)\gamma^0 = \bar{u}_r(0)(+c\hbar k\!\!\!/ + mc)/N$, sowie dass $\bar{u}_r(0)\gamma^i u_s(0) = 0$, und analog für $\bar{v}_r(k)$.

Aufgabe 22: nichtrelativistische Streuung an einer Potentialstufe *(4 Punkte)*
Betrachten Sie das eindimensionale Potential

$$V(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } z < 0 \\ V_0 & \text{für } z > 0 \end{cases} \tag{7}$$

(a) Von links laufe eine ebene Welle der Energie $E > V_0 > 0$ ein. Berechnen Sie den einlaufenden (j_{in}), transmittierten (j_{t}) und reflektierten (j_{r}) Strom, und demonstrieren Sie Stromerhaltung.

(b) Was ändert sich für $0 < E < V_0$? Berechnen Sie wieder alle Ströme.

Aufgabe 23: Streuung relativistischer Teilchen an einer Potentialstufe *(8 Punkte)*
Gegeben sei dieselbe Potentialstufe wie in der vorherigen Aufgabe. Die Wellenfunktion der einlaufenden (ψ_{in}), transmittierten (ψ_{t}) und reflektierten (ψ_{r}) Welle seien nun aber keine Lösungen der Schrödingergleichung, sondern Lösungen der Diracgleichung mit positiver Energie.

$$\text{für } z < 0: \qquad \psi_{\text{in}} = e^{+ik_z z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c\hbar k_z}{E+mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \psi_{\text{r}} = a e^{-ik_z z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-c\hbar k_z}{E+mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} + b e^{-ik_z z} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{+c\hbar k_z}{E+mc^2} \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\text{für } z > 0: \qquad \psi_{\text{t}} = c e^{+iq_z z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c\hbar q_z}{E-V_o+mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} + d e^{+iq_z z} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-c\hbar q_z}{E-V_o+mc^2} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Der gemeinsame Phasenfaktor $\exp[-iEt/\hbar]$ wurde schon absepariert.

(a) Die Diracgleichung ist eine Differentialgleichung ersten Grades. Welche Anschlussbedingungen muss die Wellenfunktion daher erfüllen?

(b) Zeigen Sie, dass der Impuls q für ebene Wellen gegeben ist durch $q_z = \frac{\pm 1}{\hbar c}\sqrt{(E - V_0)^2 - m^2c^4}$.

(c) Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b, c, d als Funktion des Ausdruckes $r = \frac{q_z}{k_z}\frac{E+mc^2}{E-V+mc^2}$.

(d) Argumentieren Sie mittels des Spinoperators Σ^z, warum zwei der Koeffizienten verschwinden mussten.

(e) Welche Gestalt hat die Wellenfunktion ψ_t für die Barrierehöhen $V_0 < E - mc^2$, $E - mc^2 < V_0 < E + mc^2$, und $E + mc^2 < V_0$. Warum spricht man hier von einem (Klein-)Paradox?

(f) Ermitteln Sie die den Reflektionskoeffizienten aus $R = |j_{\text{r}}/j_{\text{in}}|$ für die Fälle $V_0 < E - mc^2$, $E - mc^2 < V_0 < E + mc^2$, und $E + mc^2 < V_0$. Die Ströme sind gegeben durch $j_i = \bar{\psi}_i \gamma^z \psi_i$.

Je nach Lösungsweg könnten folgende Relationen hilfreich sein.

$(\gamma^0)^2 = 1$
$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$