Quantentheorie II

Übungsblatt 9

Abgabe: Mittwoch, 27.06.07
Besprechung: Donnerstag, 28.06.07, 14:00 in 26C402

Aufgabe 26 : Komplexes Klein-Gordon Feld *(4 Punkte)*
Die Lagrangedichte des komplexen Klein-Gordon Feldes ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\star \, \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\star \phi \,, \tag{1}$$

wobei $\hbar = c = 1$. Da ϕ komplex ist und damit zwei Freiheitsgrade besitzt, werden ϕ und $\phi^\star$ als unabhängige Felder behandelt. Um Summationen über die verschiendenen Felder auszuführen definieren wir $\phi_1 = \phi$ und $\phi_2 = \phi^\star$.

(a) Zeigen Sie, dass die verallgemeinerten Impulse gegeben sind durch $\pi_1 = \dot{\phi}^\star$, und $\pi_2 = \dot{\phi}$.

(b) Leiten Sie aus der Euler-Lagrange-Gleichung $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_\mu \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} = 0$ die Klein-Gordon Gleichung für ϕ und $\phi^\star$ her.

(c) Überprüfen Sie dass die Hamiltonfunktion gegeben ist durch

$$H = \int d^3x \left(\sum_r \pi_r \dot{\phi}_r - \mathcal{L} \right) = \int d^3x \left(\dot{\phi}^\star \dot{\phi} + (\nabla \phi^\star)(\nabla \phi) + m^2 \phi^\star \phi \right) \tag{2}$$

Aufgabe 27 : Quantisierung des Klein-Gordon Feldes *(10 Punkte)*
Die vorherige Aufgabe behandelt eine klassische Feldtheorie. Es entsteht daraus eine Quantenfeldtheorie wenn man fordert, dass die Felder bei gleichem Zeitindex die kanonischen Vertauschungsrelationen erfüllen:

$$\begin{aligned} \big[\phi_r(\boldsymbol{x}, t), \pi_s(\boldsymbol{y}, t)\big] &= i\,\delta_{rs}\,\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \qquad \text{und} \\ \big[\phi_r(\boldsymbol{x}, t), \phi_s(\boldsymbol{y}, t)\big] &= \big[\pi_r(\boldsymbol{x}, t), \pi_s(\boldsymbol{y}, t)\big] = 0\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Da ϕ nun Operatoreigenschaften tragen muss um die Vertauschungsrelationen zu erfüllen schreiben wir $\phi_2 = \phi^\dagger$ anstatt $\phi^\star$. Man entwickelt die Feldoperator ϕ (und $\phi^\dagger$ analog) in einem vollständigen Satz Lösungen der Klein-Gordon Gleichung

$$\phi(x, t) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{P}}}} \left(a(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + b^\dagger(\boldsymbol{p}) e^{+ipx} \right) \qquad \text{mit} \qquad p^0 = \omega_{\boldsymbol{p}} = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}\,. \tag{4}$$

Die Operatoreigenschaften werden von $a^{(\dagger)}(\boldsymbol{p})$ und $b^{(\dagger)}(\boldsymbol{p})$ getragen.

(a) Was sind die kanonischen Vertauschungsrelationen für $\phi^{(\dagger)}$ und $\dot{\phi}^{(\dagger)}$?

(b) Berechnen Sie die (gleichzeitigen) kanonischen Vertauschungsrelationen für $a^{(\dagger)}$ und $b^{(\dagger)}$. Die entsprechende Rücktransformation ist gegeben durch

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{p}) &= \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{p}}}} e^{-i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}} \left(\omega_{\boldsymbol{p}} \phi(\boldsymbol{x}, 0) + i\dot{\phi}(\boldsymbol{x}, 0) \right) \qquad \text{und} \\ b(\boldsymbol{q}) &= \int \frac{d^3y}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{q}}}} e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{y}} \left(\omega_{\boldsymbol{q}} \phi^\dagger(\boldsymbol{y}, 0) + i\dot{\phi}^\dagger(\boldsymbol{y}, 0) \right)\,, \end{aligned} \tag{5}$$

und die adjungierten Gleichungen für $a^\dagger(\boldsymbol{p})$ und $b^\dagger(\boldsymbol{q})$.
Anmerkung: Berechnen sie nur die nötigsten Kommutatoren, erschliessen Sie die Übrigen.

(c) Zeigen Sie, dass mit der geforderten Vertauschungsrelation die Hamiltonfunktion aus Gleichung (2) in den folgenden Operator übergeht

$$H = \int d^3p \; \omega_{\boldsymbol{p}} \Big(a^\dagger(\boldsymbol{p}) a(\boldsymbol{p}) \; + \; b^\dagger(\boldsymbol{p}) b(\boldsymbol{p}) \Big) + \mathrm{const.} \tag{6}$$

Aufgabe 28 : Ladungsoperator des komplexen Klein-Gordon Feldes *(6 Punkte)*
Die (klassische) Lagrangedichte in Gleichung (1) ist offensichtlich invariant unter der Phasentransformation $\phi \to e^{i\alpha}\phi$. Dadurch ergibt sich die erhaltene Ladung

$$Q = i \int d^3x \; (\, \phi^\star \pi^\star \; - \; \pi \phi \,) \tag{7}$$

(a) Überprüfen Sie, dass der Ladungsoperator in einer Quantenfeldtheorie gegeben ist durch

$$Q = \int d^3p \; \Big(a^\dagger(\boldsymbol{p}) a(\boldsymbol{p}) \; - \; b^\dagger(\boldsymbol{p}) b(\boldsymbol{p}) \Big) + \mathrm{const.} \tag{8}$$

Was bedeutet dies für die Ladung der unterschiedlichen Teilchen?

(b) Eine Invarianz unter einer Transformation bedingt eine Erhaltungsgrösse. Anders herum ist diese Erhaltungsgrösse auch der Generator der entsprechenden Transformation. Zeigen Sie, dass der Ladungsoperator der Generator der Phasentransformation ist:

$$e^{-i\alpha Q} \phi(x) e^{+i\alpha Q} = e^{i\alpha} \phi(x) \tag{9}$$

Anmerkung: Diese "Ladung" kann die elektrische Ladung eines Teilchens beschreiben, aber sie kann auch andere interne Freiheitsgrade klassifizieren wie z.B. die Hyperladung.

Beachten Sie:

$$e^{ikx} = e^{ik_0 x_0} e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \; e^{i(k-q)x} \;=\; \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{q}) e^{i(k_0 - q_0)x_0} \;=\; \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{q})$$

weil $k_0 = \omega_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2} = \sqrt{\boldsymbol{q}^2 + m^2} = \omega_{\boldsymbol{q}} = q_0$ sein muss.