RWTH AACHEN

Dozent: Prof. Dr. G. Burkard
Übungen: M. Braun & T. Barthel
SS07, Nr. **07ss-17572**

Quantentheorie II

Übungsblatt 11

Abgabe: Mittwoch, 11.07.07
Besprechung: Donnerstag, 12.07.07, 14:00 in 26C402

Aufgabe 33 : No-Cloning Theorem *(5 Punkte)*

Das No-Cloning Theorem besagt, dass man einen beliebigen quantenmechanischen Zustand durch lineare Operatoren nicht duplizieren kann. Angenommen es gäbe eine lineare Operation U, die den Zustand $|\psi\rangle$ auf einen anderen Zustand $|...\rangle_{\text{copy}}$ kopiert.

$$|\psi\rangle|0\rangle_{\text{copy}} \xrightarrow{U} |\psi\rangle|\psi\rangle_{\text{copy}} \,. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass wenn die lineare Operation das Kopieren der Zustände $|\psi\rangle = |0\rangle$ und $|1\rangle$ erlaubt, so scheitert das Klonen des Zustandes $|\psi\rangle = |0\rangle + |1\rangle$.

Aufgabe 34 : Der Deutsch Algorithmus *(5 Punkte)*

Man besitze eine Münze/Geldstück. Nun will man entscheiden, ist die Prägung auf den zwei Seiten der Münze verschieden (wie üblich), oder gleich. Klassisch muss man je einmal auf jede Seite der Münze sehen, un dann das Messergebniss vergleichen. Mittels des Deutsch-Quantenalgorithmus muss man nur einmal "hinsehen".

Unsere "Münze" seinen zwei Spins/Qubits A und B, die jeweils in einem "up" oder "down" Zustand sind. Nun gilt es zu entschereiden, ist der Gesammtzustand entweder $|\uparrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B$, bzw. $|\downarrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B$, oder $|\uparrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B$ bzw. $|\downarrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B$.

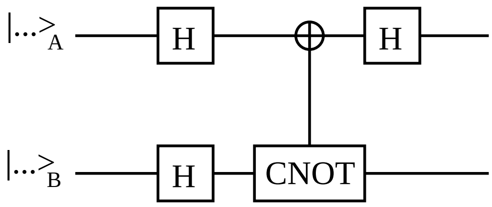

Abb.1: Der Deutsch Algorithmus

Um dies zu entscheiden benötigt man das Hadamard (H) Gate

$$|\uparrow\rangle_i \xrightarrow{\text{H}} \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\uparrow\rangle_i + |\downarrow\rangle_i\Big) \qquad |\downarrow\rangle_i \xrightarrow{\text{H}} \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\uparrow\rangle_i - |\downarrow\rangle_i\Big)\,, \tag{2}$$

welches auf ein einzelnes Qubit wirkt, sowie das controlled-not (CNOT) Gate

$$|\uparrow\rangle_A|\sigma\rangle_B \xrightarrow{\text{CNOT}} |\uparrow\rangle_A|\sigma\rangle_B \qquad |\downarrow\rangle_A|\sigma\rangle_B \xrightarrow{\text{CNOT}} |\downarrow\rangle_A|\bar{\sigma}\rangle_B\,, \tag{3}$$

welches das Qubit B flippt ($\sigma = \uparrow/\downarrow \;\rightarrow\; \bar{\sigma} = \downarrow/\uparrow$), wenn Qubit A sich im "down"-Zustand befindet.

(a) Zeigen Sie, dass man nach der Sequenz in Abb. 1 am Endzustand von Qubit A ablesen kann, ob oder ob nicht die zwei Qubits denselben Anfangszustand hatten.

(b) Was passiert, wenn man zwei Hadamard-Gates an einem Qubit nacheinander ausführt?

(c) Erklären Sie kurz, warum sich überhaupt das erste Qubit ändern kann.

bitte wenden

Aufgabe 35 : Die Schmidt-Zerlegung *(5 Punkte)*

Wir betrachten ein aus zwei Teilen zusammengesetztes Quantensystem. Seien $\{|i\rangle_A\}$ und $\{|j\rangle_B\}$ die Orthonormalbasen der Hilberträume H_A und H_B. Jedes Element $|\psi\rangle_{AB}$ des gemeinsamen Hibertraums $H_A \otimes H_B$ kann in der Basis

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i,j} a_{ij} |i\rangle_A |j\rangle_B \tag{4}$$

entwickelt werden. Zeigen Sie, dass man eine neue Basis finden kann, sodass gilt:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i} g_i |i\rangle_A |\tilde{i}\rangle_B \tag{5}$$

mit den Orthonormalbasen $\{|i\rangle_A\}$ und $\{|\tilde{i}\rangle_B\}$. Um dies zu zeigen, schreibt man $|i'\rangle_B = \sum_j a_{ij}|j\rangle_B$. Man muss also zeigen, dass die $|i'\rangle_B$ noch ein orthogonales Basissystem bilden. Dafür wählen wir die Basis $\{|i\rangle_A\}$ so, dass die reduzierte Dichtematrix $\rho_A = \sum_i p_i |i\rangle_A\, {}_A\langle i|$ diagonal ist (was immer möglich ist). Zeigen Sie, dass daraus folgt, dass in diesem Falle $|i'\rangle_B$ ein Orthogonalsystem bilden muss. Was ist der Zusammenhang zwischen p_i und g_i?

Aufgabe 36 : Beispiel einer POVM- Messung *(5 Punkte)*

Gegeben ist ein Qubit, dass sich entweder im Zustand

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle \tag{6}$$

befindet, oder im Zustand

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big)\,. \tag{7}$$

Da diese beiden möglichen Zustände nicht orthogonal sind kann keine Messung sie völlig zuverlässig unterscheiden. Für eine POVM konstruiert man die Messoperatoren $F_1 = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}|1\rangle\langle 1|$, $F_2 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\big(|0\rangle - |1\rangle\big)\big(\langle 0| - \langle 1|\big)$, und $F_3 = 1 - F_1 - F_2$. Die Warscheinlichkeit das Messergebniss $''a''$ zu erhalten ist damit gegeben durch $p(a) = \mathrm{Tr}[\rho F_a]$.

(a) Falls das Qubit im Zustand $|\psi_1\rangle$ ist, was ist jeweils die Wahrscheinlichkeit das Messergebniss $a = 1$, $a = 2$, oder $a = 3$ zu messen?

(b) Falls das Qubit im Zustand $|\psi_2\rangle$ ist, was ist jeweils die Wahrscheinlichkeit das Messergebniss $a = 1$, $a = 2$, oder $a = 3$ zu messen?

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man also durch eine einzelne Messung sicher unterscheiden, ob das Qubit im Zustand $|\psi_1\rangle$ oder $|\psi_2\rangle$ war?

(d) Falls man das Qubit einfach mit dem den Operator $P_0 = |0\rangle\langle 0|$ und $P_1 = |1\rangle\langle 1|$ messen wuerde, mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man nach einer einzelnen Messung unterscheiden, ob das Qubit in Zustand $|\psi_1\rangle$ oder $|\psi_2\rangle$ war?