RWTHAACHEN

Dozent: Prof. Dr. G. Burkard
Übungen: Braun, Kahlert, & Wegewijs
WS07/08, Nr. **07ws-04673**

Einführung in die Theoretische Physik

Übungsblatt 1

Abgabe: Montag, 29.10.07
Besprechung: Freitag, 02.11.07

Aufgabe 1: Nachtrag zum schiefen Wurf *(3 Punkte)*
Demonstrieren Sie duch explizites Einsetzen, dass die Lösung der Differentialgleichung

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = -mg\boldsymbol{e}_z - \beta\boldsymbol{v} \tag{1}$$

gegeben ist durch

$$\boldsymbol{v} = -g\frac{m}{\beta}(1 - e^{-\beta t/m})\boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{v}_0 e^{-\beta t/m}\,. \tag{2}$$

(Vektoren werden durch fette Zeichen symbolisiert, z.B. $\boldsymbol{v} = \vec{v}$)

Aufgabe 2: Einführung in komplexe Zahlen *(7 Punkte)*
Komplexen Zahlen erweitern die reellen Zahlen derart, dass auch Wurzeln negativer Zahlen berechnet werden können. Dies gelingt durch Einführung einer neuen Zahl i, mit der Eigenschaft

$$i^2 = -1. \tag{3}$$

Eine komplexe Zahl z kann in der Form $z = a + ib$ dargestellt werden, wobei a und b reelle Zahlen sind. Man bezeichnet a als den Realteil $\mathrm{Re}(z) = a$, und b als Imaginärteil $\mathrm{Im}(z) = b$.

(a) Zeigen Sie, dass aus Gleichung (3) direkt die Rechenregeln folgen

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2) \tag{4}$$
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) \tag{5}$$

(b) Dreht man das Vorzeichen des Imaginärteils b einer komplexen Zahl $z = a+ib$ um, so erhält man die zu z *konjugiert komplexe* Zahl $z^\star = a - ib$. Berechnen Sie $z \cdot z^\star$.

(c) Gegeben seien die zwei komplexen Zahlen $z_1 = 4+6i$ und $z_2 = -1-i$. Berechnen sie $\mathrm{Re}(z_1)$, $\mathrm{Im}(z_2)$, $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $z_1^\star \cdot z_2^\star$, und z_1/z_2.

(d) Aus der *Eulerschen Identität* $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$ folgt direkt, dass man jede komplexe Zahl auch in der sogenannten Polarform $z = a + ib = re^{i\phi}$ darstellen kann. Drücken Sie r und ϕ als Funktionen von a und b aus.

(e) Vereinfachen Sie $\frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi})$ und $\frac{1}{2i}(e^{i\phi} - e^{-i\phi})$.

(f) Offensichtlich gilt $e^{i\phi} \cdot e^{i\eta} = e^{i(\phi+\eta)}$. Leiten Sie damit die Additionstheoreme

$$\sin(\phi + \eta) = \sin\phi\cos\eta + \sin\eta\cos\phi$$
$$\cos(\phi + \eta) = \cos\phi\cos\eta - \sin\eta\sin\phi$$

für Sinus und Kosinus her. Tip: Die komplexe Gleichung $z_1 = z_2$ beinhaltet die zwei reellen Gleichungen $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ und $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$.

(g) Berechnen Sie die Nullstellen des Polynoms $f(x) = x^2 + 2x + 2$.

bitte wenden

Aufgabe 3 : Reihen *(4 Punkte)*

(a) Zeigen Sie dass die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gegeben ist durch

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{6}$$

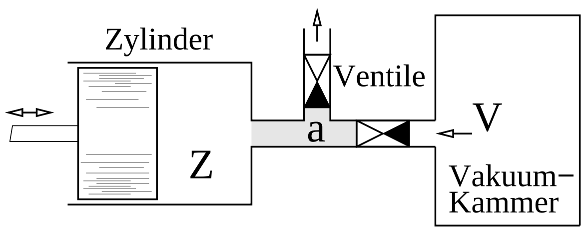
(b) Überprüfen Sie, dass die rekursiv definierte Reihe $a_n = b \cdot a_{n-1} + c \cdot a_0$ die explizite Darstellung

$$a_n = \left(b^n + \frac{1 - b^n}{1 - b}\, c \right) a_0 \tag{7}$$

besitzt.

Aufgabe 4 : Folgen I: Pumpen *(6 Punkte)*

Aus der Vakuumkammer mit Volumen V soll mittels einer Kolbenpumpe mit dem Zylindervolumen Z die Luft abgepumpt werden, siehe Bild. Die Pumpe ist jedoch nicht ideal, da das Anschlussstück der Ventile ein endliches Volumen a besitzt. Der Ausgangsdruck p_0 in der Kammer sei der Umgebungsluftdruck. Benutzen Sie in ihrer Rechnung die ideale Gasgleichung, wobei Sie als Vereinfachung annehmen, dass die Temperatur T des Gases sich nie ändert.



(a) Leiten Sie eine Beziehung zwischen dem Druck p_n in der Vakuumkammer nach dem n-ten Hubvorgang und p_{n-1} ab.
TIP: Überlegen Sie sich, wann (und wann nicht) sich die Teilchenzahlen in den abgeschlossenen Volumen ändert.

(b) Finden sie den expliziten Ausdruck für den Druck p_n.

(c) Bestimmen Sie den minimalen Enddruck in der Kammer.

(d) Was macht eine gute Pumpe aus?

Anmerkung: Die ideale Gasgleichung lautet $pV = Nk_BT$, wobei N für die Gasatomzahl steht, und k_B die Boltzmann-Konstante ist.

Ihre abzugebendende Lösung MUSS immer sinnvoll zusammengeheftet, sowie akzeptabel leserlich sein. Des weiteren muss sie mit ihrem Namen und der Nummer ihrer Übungsgruppe versehen sein. Lösungen welche diese formalen Kriterien nicht erfüllen **werden nicht akzeptiert**.