Dozent: Prof. Dr. G. Burkard
Übungen: Braun, Kahlert, & Wegewijs
WS07/08, Nr. **07ws-04673**

Einführung in die Theoretische Physik

Übungsblatt 3

Abgabe: Montag, 12.11.07
Besprechung: Freitag, 16.11.07

Aufgabe 9: Klassische Kurvendiskussion *(4 Punkte)*

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 \qquad (1)$$

(a) Bestimmen Sie die Nullstellen durch Polynomdivision.

(b) Beschreiben Sie das Verhalten der Funktion im Limes $\lim_{x\to\pm\infty}$.

(c) Finden sie die Extremalpunkte der Funktion, und klassifizieren Sie diese.

(d) Berechnen Sie die Wendepunkte der Funktion.

(e) Zeichnen Sie die Funktion.

Aufgabe 10: Ableitungen *(5 Punkte)*

Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \sin(2x)$ und $f(x) = \sin^2(x)$

(b) $f(x) = \sinh(x^2)$ und $f(x) = \operatorname{arcosh}(x)$

(c) $f(x) = x^x$ und $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

(d) $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

(e) $f(x) = \log_a\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$

Mit $\log_a$ ist hier der Logarithmus zur Basis a gemeint.

Aufgabe 11: Grenzwerte II: Die Regel von L'Hospital *(4 Punkte)*

Die Funktionen f und g seien an der Stelle x_0 differenzierbar und es existiere ein Grenzwert. Ferner gelte $f(x_0) = g(x_0) = 0$ oder ∞. Dann folgt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \left(f'(x) = \frac{df(x)}{dx}\right) \qquad (2)$$

solange der Grenzwert auf der rechten Seite existiert. Der Satz von L'Hospital kann auch gegebenenfalls mehrfach hintereinander angewendet werden. Berechnen Sie die Grenzwerte mit L'Hospital:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + \sin x}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^3 + 6x^2 + 6x + 2}{x^2 + 2x + 1}$

(c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x + \sin x}{x}$ (Negativbeispiel! Was ist die richtige Antwort?)

bitte wenden

Aufgabe 12 : Komplexe Wechselstromrechnung *(7 Punkte)*
Eine wichtige Anwendung der komplexen Zahlen besteht in der von Arthur Edwin Kennelly entwickelten komplexen Wechselstromrechnung. Die Idee dabei ist, dass man während der Berechnung von Strom und Spannung auch komplexe Werte zulässt. Am Ende der Rechnung betrachtet man dann nur den Realteil der Gleichung als physikalisch relevant. Diese Methode hat den Vorteil, dass man das Ohmschen Gesetz

$$U = Z \cdot I, \tag{3}$$

derartig erweitert, und damit nicht nur (reelle) Ohmsche Widerstände Z_R beschreiben kann, sondern auch Kondensatoren und Spulen durch komplexe Widerstände (diese nennt man Impedanzen). Für die Wechselspannung mit der (Kreis)Frequenz ω ist die Impedanz eines Kondensators mit Kapazität C gegeben durch $Z_C = (i\omega C)^{-1}$, und der einer Spule mit Induktivität L gegeben durch $Z_L = i\omega L$.

Betrachten Wir eine angelegte Spannung der Form $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$

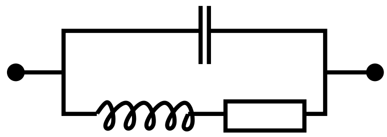
(a) Zeigen Sie, dass durch die Impedanz Z der Strom $I(t) = I_0 e^{i(\omega t - \phi)}$ fliesst. Bestimmen Sie den "ohm"-artigen Scheinwiderstand U_0/I_0 und die Phasenverschiebung ϕ zwischen Strom und Spannung als Funktion von Z.

(b) Berechnen Sie den Scheinwiderstand $|Z|$ und die Phasenverschiebung ϕ....

(b.1) eines Ohmschen Widerstandes.

(b.2) eines Kondensators.

(b.3) einer Spule.



(c) Betrachten Sie die nebenstehende Schaltung:

(c.1) Berechnen Sie $|Z|$. Verwenden Sie die Bezeichnungen $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ und $R_0 = \sqrt{L/C}$.

(c.2) Plotten Sie $|Z|$ als Funktion von ω in Einheiten von R_0 bzw. ω_0 für die Parameter $R = 0.1R_0$, $R = 1.0R_0$, und $R = 10R_0$.

(c.3) Wie verhällt sich die Impedanz für sehr grosse und sehr kleine Frequenzen, und im Limes $Z_R \to \infty$? Interpretieren Sie ihr Ergebnis physikalisch.

(c.4) Bestimmen Sie im Limes $\lim_{R\to 0}$ und im Limes $\lim_{R\to\infty}$ die Frequenz ω, für die der Scheinwiderstand $|Z|$ extremal wird.