Dozent: Prof. Dr. G. Burkard
Übungen: Braun, Kahlert, & Wegewijs
WS07/08, Nr. **07ws-04673**

Einführung in die Theoretische Physik

Übungsblatt 5

Abgabe: Montag, 26.11.07
Besprechung: Freitag, 30.11.07

Aufgabe 19 : Partialbruchzerlegung *(5 Punkte)*
Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke durch Partialbruchzerlegung. Sollten Sie in der Schule keine Partialbruchzerlegung gemacht haben, so können Sie auf der Rückseite des Aufgabenblattes Informationen dazu finden.

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

(b) $g(x) = \dfrac{1}{(x+U)(x+V)}$

Aufgabe 20 : Integration I *(5 Punkte)*
Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a) $\int \mathrm{d}x \, \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ durch Partialbruchzerlegung

(b) $\int_a^b \mathrm{d}x \; x^m \ln x$ durch partielle Integration

(c) $\int \mathrm{d}x \, \dfrac{1}{(4+5x)^3}$ durch Substitution

(d) $\int \mathrm{d}\varphi \, \dfrac{1}{\sin\varphi}$ durch $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\dfrac{d}{dx} \tan x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, und $\int \mathrm{d}x \, \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ln \, f(x)$.

(e) $\int \mathrm{d}x \, \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ durch Ausnutzen von $\lim\limits_{q \to 1} \dfrac{d}{dq} \left(\dfrac{1}{x^2 + q^2} \right)$ und $\frac{d}{dx} \arctan(x) = \ldots$

Vorsicht: Aufgaben (d) und (e) sind etwas kniffeliger (geben aber auch nur 1 Punkt je).

Aufgabe 21 : von Planck zum Stefan-Boltzmann-Gesetz *(5 Punkte)*
Ein (idealisierter) Körper der Temperatur T emitiert Wärmestrahlung. Nach Planck ist die Strahlungsleistung pro Fläche im Frequenzbereich zwischen ν und $\nu + \mathrm{d}\nu$ gegeben durch

$$M(\nu, T) = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)} - 1} \,. \tag{1}$$

Das Integral über alle Frequenzen ν gibt demnach die Gesamtstrahlungsleistung pro Fläche. Zeigen Sie das Stefan-Boltzmann-Gesetz, welches besagt, dass die Gesamtstrahlungsleistung proportional zu T^4 ist.

Tip: Eine explizite Lösung des Integrals ist nicht notwendig.

bitte wenden

Aufgabe 22: Zeit, Weg und Beschleunigung *(5 Punkte)*

Ein Auto beschleunige aus dem Stand bei $t = 0$ konstant mit der Beschleunigung a. Lösen Sie folgende Aufgaben durch Integration.

(a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $v(t)$ zum Zeitpunkt $t = T$.

(b) Bestimmen Sie den zurückgelegten Weg $s(t)$ zur Zeit $t = T$.

(c) Was ist die bisherige Durchschnittsgeschwindigkeit des Wagens?

(d) Zeigen Sie durch Integration (und geeigneter Substitution) der Gleichung $v(t) = at$, dass

$$2as(T) = v(T)^2 - v(0)^2$$

Multiplizieren Sie diese Gleichung mit $m/2$ und interpretieren Sie diese physikalisch.

Partialbruchzerlegung

Gebrochen-rationale Funktionen $f = \dfrac{\text{Zählerpolynom}}{\text{Nennerpolynom}}$ können häufig durch Partialbruchzerlegung vereinfacht werden. Dafür sind folgende Arbeitsschritte nötig:

0. Versuchen zu kürzen.
1. Falls der Polynomgrad des Zählers grösser oder gleich dem des Nenners ist kann man durch Polynomdivision ein Polynom von dem Bruch abspalten.
2. Das Nennerpolynom faktorisieren: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... = \prod_n (x - x_{0,n})$, wobei $x_{0,n}$ die n-te Nullstelle des Polynoms ist.
3. Man weiss, dass die gebrochenrationale Funktion als Summe darstellbar ist

$$f = \frac{\text{Zählerpolynom}}{\text{Nennerpolynom}} = \frac{A}{x - x_{0,1}} + \frac{B_1}{x - x_{0,2}} + \frac{B_2}{(x - x_{0,2})^2} + ... + \frac{C}{x - x_{0,n}}\,, \qquad (\star)$$

wobei für jede einfache Nullstelle x_0 ein Summand der Form $\frac{A}{x-x_0}$ auftritt, und für eine m-fache Nullstelle Summanden der Form $\frac{B_1}{(x-x_0)} + \frac{B_2}{(x-x_0)^2} + ... + \frac{B_m}{(x-x_0)^m}$ auftreten.

4. Die unbekannten Koeffizienten $(A, B_n, C, ...)$ können bestimmt werden, indem man Gleichung $(\star)$ mit dem Nennerpolynom durchmultipliziert (und entsprechend kürzt), und dann feste Werte für x einsetzt (es empfehlen sich gerade die Nullstellen $x_{0,1}$, $x_{0,2}$, ...). So entsteht ein lineares Gleichungssystem, welches die Koeffizienten bestimmt.

Beispiel

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^4 + x^3 - 2x^2} &= \frac{1}{x^2(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \frac{C}{x+2} \\
\Rightarrow 1 &= x^2(x+2)A + x(x-1)(x+2)B_1 + (x-1)(x+2)B_2 + x^2(x-1)C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{für } x = 0 &: \ 1 = -2B_2 \\
\text{für } x = 1 &: \ 1 = 3A \\
\text{für } x = -2 &: \ 1 = -12C \\
\text{für z.B. } x = 2 &: \ 1 = 16A + 8B_1 + 4B_2 + 4C
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^4 + x^3 - 2x^2} = \frac{1}{x^2(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{4x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{12(x+2)}$$