RWTH AACHEN

Dozent: Prof. Dr. G. Burkard
Übungen: Braun, Kahlert, & Wegewijs
WS07/08, Nr. **07ws-04673**

Einführung in die Theoretische Physik

Übungsblatt 7

Abgabe: Montag, 10.12.07
Besprechung: Musterlösung

Aufgabe 27 : Homogene Differentialgleichungen *(3 Punkte)*
Finden Sie die Lösungen $x(t)$ der folgenden Differentialgleichung mittels eines Exponentialansatzes $x(t) = e^{\lambda t}$

$$x''(t) + 3x'(t) + 2\,x(t) = 0 \tag{1}$$

Eine Differentialgleichung 2ten Grades besitzt 2 unterschiedliche Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$. Die Gesamtlösung ist gegeben durch die Summe $x(t) = A\,x_1(t) + B\,x_2(t)$. Bestimmen Sie die Konstanten A und B durch die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $x'(0) = 1$.

Aufgabe 28 : Inhomogene lineare Differentialgleichung *(3 Punkte)*
Die Lösungen $x(t)$ einer inhomogenen linearen Differentialgleichung $f(x, x', x''...) = g(t)$ setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichung $f(x, x', x'', ...) = 0$ plus einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung. Lösen Sie folgende Differentialgleichung:

$$x(t) - 2x''(t) = 2t^2 - 7 \tag{2}$$

Tip: Ein Polynomansatz $x(t) = at^2 + bt + c$ kann zur Lösung der inhomogenen Gleichung hilfreich sein.

Aufgabe 29 : Separation der Variablen *(3 Punkte)*
Eine Differentialgleichung ersten Grades der Form $x' = f(t) \cdot g(x)$ kann man durch die Methode der Separation der Variablen lösen. Dazu teilt man durch $g(x)$ und integriert beide Seiten über t. Durch eine Substitution $y = x(t)$ ($\rightarrow dy = x'dt$) erhält man auf der linken Seite $\int \mathrm{d}t\, x'/g(x(t)) = \int \mathrm{d}y\; 1/g(y)$. Durch das Ausführen der Integration nach y auf der linken, und nach t auf der rechten Seite erhält man schliesslich eine algebraische Gleichung (Integrationskonstante nicht vergessen). Nun muss man diese Gleichung nur noch nach $y = x(t)$ auflösen.
Lösen Sie folgende Differentialgleichung mittels der Separation der Variablen

$$x'(t) + \lambda\,x(t) = \delta \tag{3}$$

bitte wenden

Aufgabe 30 : Radioaktivität *(5 Punkte)*

Eine Materialprobe enthält zum Zeitpunkt $t = 0$ die Anzahl N_0 Atomkerne eines radioaktiven Isotopes. Ein radioaktiver Isotopenkern zerfällt zufällig mit der Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit γ in entsprechende Zerfallsprodukte. (Einheit $[\gamma] = 1/s$)

Das bedeutet, die Anzahl der Isotopenkerne $N(t)$ ändert/verringert sich proportional zur Anzahl der Isotopenkerne.

(a) Stellen Sie eine Differentialgleichung für $N(t)$ auf.

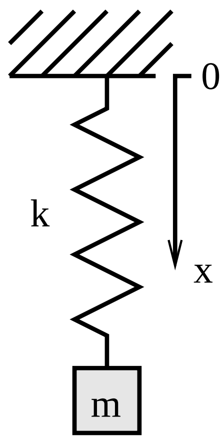
(b) Lösen Sie diese Differentialgleichung für die entsprechnde Randbedingung.

(c) Bestimmen Sie die Halbwertszeit, also die Zeit, in der die Hälfte der Kerne zerfallen sind.

(d) Berechnen Sie die Aktivität (Zerfälle pro Sekunde) der Probe.

Aufgabe 31 : Das Federpendel *(6 Punkte)*

Eine Masse m hänge an einer Feder von der Decke. Die Feder habe die Federkonstante k und im unbelasteten Fall die Länge x_0.



(a) Berechnen Sie die Gleichgewichtslage $x' = x_0 + mg/k$ der Masse m.

(b) Stellen sie mit $F(x) = m\ddot{x}$ eine Differentialgleichung für die ausschliesslich vertikale Bewegung der Masse auf.

(c) Vereinfachen Sie diese Differentialgleichung, indem Sie die absolute Koordinate x durch die Koordinate $u = x - x'$ ersetzen, welche den Relativabstand zur Gleichgeweichtslage beschreibt.

(d) Lösen Sie die Differentialgleichung $m\ddot{u} = -ku$

(e) Bestimmen Sie die auftretenden Konstanten, so dass bei $t = 0$ die Masse...

(e.1) ...um u_0 nach unten ausgelenkt ist, aber keine Geschwindigkeit hat

(e.2) ... in der Gleichgewichtslage ist, aber durch einen Stoss die Anfangsgeschwindigkeit v_0 nach oben erhält.

Probeklausur: Am Freitag den 14.12.07 findet anstatt der Übungsstunde die Probeklausur statt. Diese zählt wie eine Übung und ersetzt das Übungsblatt, welches sie am Montag, 17.12.07 bekommen würden. Die Probeklausur wird am Freitag 11.01.08 in den Übungen besprochen. Wegen Raumproblemen muss Gruppe 3 in den Hörsaal AH I, und Gruppe 10 in den Hörsaal MS umziehen.

Musterlösung: Da am Freitag 21.12.07 kein Übung stattfindet erhalten Sie am Montag 10.12.07 eine schriftliche Musterlösung für das Übungsblatt 07. Es wird empfohlen sich diese bis zum Freitag 14.12.07 anzusehen.