RWTHAACHEN

Dozent: Prof. Dr. G. Burkard
Übungen: Braun, Kahlert, & Wegewijs
WS07/08, Nr. **07ws-04673**

Einführung in die Theoretische Physik

Übungsblatt 9

Abgabe: Montag, 14.01.08
Besprechung: Freitag, 18.01.08

Aufgabe 37 : Pauli-Matrizen *(6 Punkte)*

Gegeben seien die folgenden 2×2–Pauli–Matrizen:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

(a) (a.1) Zeigen Sie $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2$.

(a.2) Im Allgemeinen vertauschen (kommutieren) Matrizen unter Multiplikation nicht, d.h. es ist z.B. $\sigma_x \sigma_y \neq \sigma_y \sigma_x$. Man definiert für beliebige quadratische Matrizen A und B den sog. Kommutator $[A, B] = AB - BA$. Bestimmen Sie $[\sigma_x, \sigma_y]$ und drücken Sie das Ergebnis durch die Pauli-Matrizen aus.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\boldsymbol{s}_{z,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{s}_{z,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(orthonormierte) Eigenvektoren zu σ_z sind. Wie lauten die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_{z,1}$ und $\lambda_{z,2}$?
Bemerkung: Die gewählte Darstellung der Matrizen setzt genau genommen schon die Wahl einer Basis voraus. Diese Basisvektoren können abstrakt mit $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ bezeichnet werden und repräsentieren dann z.B. den Spin eines Elektrons.

(c) Finden Sie die entsprechenden Eigenwerte $\lambda_{\alpha,j}$ und Eigenvektoren $\boldsymbol{s}_{\alpha,j}$ ($\alpha = x, y$, $j = 1, 2$) zu σ_x und σ_y und drücken Sie die Eigenvektoren durch $\boldsymbol{s}_{z,j}$ aus.
Hinweis: Meist wählt man die Eigenvektoren normiert. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass für einen Vektor $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mit komplexen Koeffizienten a_j der Betrag des Vektors über die Beträge der Koeffizienten definiert ist, d.h. $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2}$.

(d) Man fasst $\vec{\sigma}$ auf als einen dreidimensionalen Vektor, dessen Komponenten die Pauli-Matrizen sind: $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$. Finden Sie die Eigenwerte zu $\vec{\sigma}^2$ und zeigen Sie, dass jedes Paar Eigenvektoren der Pauli-Matrizen auch Eigenvektoren zu $\vec{\sigma}^2$ sind.

Aufgabe 38 : Gedämpfte Schwingung *(8+2 Punkte)*

Ein mechanisches System macht eine Schwingung entlang der Koordinaten x in einer Dimension. Die Bewegungsgleichung lautet $m\ddot{x}(t) = -kx(t)$, wobei m die Masse und k die Kraft-Konstante ist. Die Frequenz der Schwingung ist $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Jetzt modifizieren wir die Bewegungsgleichung um *Reibung* zu berücksichtigen: $m\ddot{x}(t) = -kx(t) + f(\dot{x}(t))$ wobei die Funktion f nur von der Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ abhängt.

(a) Für Schwingungen mit kleinen Amplituden x und daher kleinen Geschwindigkeiten $v = \dot{x}$ gilt: $f(\dot{x}(t)) \approx -\alpha\dot{x}(t)$. Begründen Sie dies physikalisch. Wie findet man α, wenn man $f(v)$ kennt? Warum soll $\alpha > 0$ sein (physikalisch)?

(b) Bringen Sie die Bewegungsgleichung in die Form $\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$. Bestimmen Sie den Parameter λ und seine Einheit.

(c) Machen Sie wie in Aufgabe 27 einen Exponentialansatz e^{rt} und zeigen sie, dass dieser die Bewegungsgleichung löst, wenn gilt $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$ (charakteristische Gleichung).

(d) Zeigen sie, dass man für den Fall schwacher Reibung, $\lambda < \omega_0$, eine gedämpfte Schwingung mit Frequenz ω' erhält und finden Sie die Lösung der Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingungen $x(0) = A, \dot{x}(0) = 0$. Was ist die Schwingungs-Frequenz ω'? Interpretieren Sie physikalisch, dass $\omega' < \omega_0$ ist.

(e) Zeigen sie, dass für starke Reibung, $\lambda > \omega_0$, keine oszillierenden Lösungen mehr gefunden werden. Geben Sie die beiden Lösungen für r und die entsprechende Lösung für $x(t)$ unter den Anfangsbedingungen aus d) an.

(f) Für den Fall $\lambda = \omega_0$ liefert der Exponentialansatz aus c) nur *eine* Lösung. Damit ist es dann nicht möglich die Anfangsbedingungen für Ort und Geschwindigkeit unabhängig zu wählen. Die Lösung ist also nicht vollständig. Um für diesen Fall die Lösung zu finden, kann man sich zunächst überlegen, dass diese weiterhin exponentiell gedämpft sein wird. Diese Dämpfung wird absepariert und man macht den Ansatz $x(t) = g(t)e^{-\lambda t}$. Finden Sie $g(t)$ und geben Sie die Lösung für $x(t)$ wieder für die Anfangsbedingungen $x(0) = A, \dot{x}(0) = 0$ an. Wie kann dieses Ergebnis als Grenzfall der Lösung für $\lambda < \omega_0$ interpretiert werden?

(g) (Bonus) Der sogenannte *Qualitätsfaktor* $Q = \frac{\omega_0}{\lambda}$ der Schwingung gibt an, wie stark die Reibung die Schwingung dämpft. Skizzieren Sie für einen beliebigen aber festen Wert von ω_0 die Lösungen der Bewegungsgleichung aus d) bis f) für die Werte $Q = 10.0, 2.0, 1.0, 0.5, 0.1$. Es wird empfohlen, hierfür auf ein Plotprogramm zurückzugreifen.

Aufgabe 39 : Erzwungene Schwingung *(6 Punkte)*

Ein eindimensionales gedämpftes schwingungsfähiges System (vgl. Aufgabe 38) werde durch eine äußere periodische Kraft $F(t) = A\cos(\omega t)$ angetrieben. Die Bewegungsgleichung lautet:

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = A\cos(\omega t)\,.$$

(a) Finden Sie die partikuläre Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung. Hierzu nehmen Sie an, dass für große Zeiten, also nach dem Abklingen des Anfangszustandes, die Bewegung der äußeren Anregung mit einer möglichen Phasenverschiebung folgen wird: $x(t) = B\cos(\omega t + \varphi)$. Bestimmen Sie Amplitude B und Phase φ der Bewegung.

(b) Diskutieren Sie das Verhalten der Phase in Abhängigkeit von der Frequenz der äußeren Anregung ω. Welchen Einfluss hat der Qualitätsfaktor $Q = \omega_0/\lambda$?

(c) Diskutieren Sie das Verhalten der Amplitude in Abhängigkeit von ω. Was geschieht in der Nähe von ω_0? Welchen Einfluss hat hier der Qualitätsfaktor $Q = \omega_0/\lambda$?