RWTH AACHEN

Dozent: Prof. Dr. G. Burkard
Übungen: Braun, Kahlert, & Wegewijs
WS07/08, Nr. **07ws-04673**

Einführung in die Theoretische Physik

Übungsblatt 11

Abgabe: Montag, 28.01.08
Besprechung: Musterlösung

Aufgabe 43 : Differential Operatoren II *(3 Punkte)*

Es sei $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2)$. Berechnen Sie:

(a) $\nabla \cdot (f(\mathbf{r})\, \mathbf{e}_z)$

(b) $\nabla \times (f(\mathbf{r})\, \mathbf{e}_z)$

(c) $\nabla f(\mathbf{r})$

Aufgabe 44 : Linienintegrale *(7 Punkte)*

Wir betrachten Linienintegrale eines Vektorfeldes entlang verschiedener Wege.

(a) Berechnen Sie die Rotation des Vektorfeldes

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (x - y)\mathbf{e}_x + (x + y)\mathbf{e}_y \tag{1}$$

(b) Berechnen Sie das Linienintegral $\int_{K_1} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$, wobei die Kurve K_1 die gerade Linie von Punkt $(1, 1, 0)$ nach $(2, 2, 0)$ ist.

(c) Berechnen Sie nun das Linienintegral $\int_{K_2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$, wobei die Kurve K_2 aus zwei Geraden besteht: zunächst von $(1, 1, 0)$ nach $(2, 1, 0)$ und dann nach $(2, 2, 0)$.

(d) Berechnen Sie die Differenz $\int_{K_2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) - \int_{K_1} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$, einmal mit Hilfe der Ergebnisse von (b) und (c), und einmal über den Satz von Stokes,

$$\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}))\,. \tag{2}$$

Wählen Sie die Fläche, über die Sie integrieren, in der x-y–Ebene.

(e) Geben Sie mittels einer kurzen Rechnung an wie sich die Ergebnisse von (a) und (d) ändern werden, wenn man betrachtet

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (x + y)\mathbf{e}_x + (x + y)\mathbf{e}_y \tag{3}$$

Aufgabe 45 : Rechenregeln Differential Operatoren *(10 Punkte)*

Hinweis: Benutzen Sie das Levi-Civita Symbol ϵ_{ijk} wo möglich.

Beweisen Sie folgende Rechenregeln:

(a) $\nabla \times (\nabla f) = 0$

(b) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = \mathbf{0}$

(c) $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$

(d) $\nabla \cdot (f\mathbf{g}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{g} + f\,(\nabla \cdot \mathbf{g})$

(e) $\nabla \times (f\mathbf{g}) = (\nabla f) \times \mathbf{g} + f\,(\nabla \times \mathbf{g})$