Dozent: Prof. Dr. G. Burkard
Übungen: Braun, Kahlert, & Wegewijs
WS07/08, Nr. **07ws-04673**

Einführung in die Theoretische Physik

Übungsblatt 12

Abgabe: ! Dienstag, **05.02.08,**
10.00-12.00 Raum 26C411 oder 26A305
Besprechung: Freitag, 08.02.08

Aufgabe 46 : Potential aus Kraft *(5 Punkte)*
Berechnen Sie aus dem Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ das Potential $V(\mathbf{r})$ durch das Linienintegral

$$V(\mathbf{R}) = -\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{R}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \tag{1}$$

für

(a) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k\mathbf{r}$

(b) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{k}{r^3}\mathbf{r}$.

Ausgangspunkt der Linienintegral-Formel ist die Relation $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$, die nur gilt, wenn

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0. \tag{2}$$

Überprüfen Sie diese Voraussetzung in beiden obigen Fällen.
Ist das Potential eindeutig festgelegt?
Hinweis zu (b): Benutzen Sie für die Berechnung des Linienintegrals Kugelkoordinaten d.h. $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\phi r \sin(\theta) d\phi + \mathbf{e}_\theta r d\theta$

Aufgabe 47 : Bezugssystem *(8 Punkte)*
Achtung: diese Aufgabe wurde am 8-2-2008 nachträglich angepasst wegen eine Korrektur zum Skript!
Betrachten Sie ein Bezugssystem KS', welches bezüglich eines Bezugssystems KS rotiert ist um einen Winkel $\phi(t)$, wobei $\phi(t)$ eine beliebige Funktion der Zeit ist. Die Einheitsvektoren von KS' sind also relativ zu den Einheitsvektoren von KS rotiert. Ein Raumpunkt wird in KS durch $\mathbf{r}$ beschrieben und bezüglich KS' durch $\mathbf{r}'$. Gegeben sei, dass gilt $\mathbf{r}'(t) = R(t)\mathbf{r}(t)$, wobei

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos\phi(t) & -\sin\phi(t) & 0 \\ \sin\phi(t) & \cos\phi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

(a) Skizzieren Sie die gegebene Situation für den Fall, dass $\phi(t)$ monoton in der Zeit wächst. Zeichnen Sie hierfür KS' in KS ein und betrachten Sie einen beliebigen Punkt $\mathbf{r}$. Zeichnen Sie $\phi(t)$ ein.

(b) Zeigen Sie, dass die Rotation die Länge der Vektoren nicht ändert, das heisst $R(t)^T R(t) = \mathbf{1}$, wobei $\mathbf{1}$ die 3×3 Einheitsmatrix andeutet.

(c) Für den Geschwindigkeitsvektor eines bewegten Raumpunkts bezüglich KS' gilt:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}'(t) = R(t)\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) + \left(\frac{d}{dt}R(t)\right)\mathbf{r}(t). \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass sich der zweite, zusätzliche Term schreiben lässt als

$$\left(\frac{d}{dt}R(t)\right)\mathbf{r}(t) = \frac{d\phi}{dt}\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}'(t) \tag{5}$$

Beachte das $'$ auf der rechten Seite! Berechnen Sie dazu die Zeitableitung der Matrix, d.h. die Ableitungen der Matrixelemente.

Aufgabe 48 : Linke- und Rechte Eigenvektoren einer nicht-symmetrischen Matrix *(7 Punkte)*
Betrachten Sie eine nicht-symmetrische Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{6}$$

(a) Bestimmen Sie die zwei Eigenwerte λ_1, λ_2 und zugehörige Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ von A, d.h. die Vektoren für die gilt ($i = 1, 2$)

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \tag{7}$$

Die Eigenvektoren brauchen nicht normiert werden.

(b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren $\mathbf{v}'_i$ der transponierte Matrix A^T, d.h. die Vektoren für die gilt ($i = 1, 2$)

$$A^T \mathbf{v}'_i = \lambda'_i \mathbf{v}'_i \tag{8}$$

Die Eigenvektoren brauchen nicht normiert werden.

(c) Was fällt ihnen auf an den Eigenwerten λ'_i? Geben Sie eine Grund für dieses Phenomen. Hint: betrachten Sie die Eigenwertgleichung $\det(A - \lambda\mathbf{1}) = 0$ und die Rechenregel $\det\mathbf{X} = \det\mathbf{X}^T$ für beliebige Matrix $\mathbf{X}$.

(d) Zeigen Sie, dass die transponierte Vektoren $(\mathbf{v}'_i)^T$ folgende Gleichung erfüllen

$$(\mathbf{v}'_i)^T A = \lambda_i (\mathbf{v}'_i)^T \tag{9}$$

Bemerkung: man nennt $(\mathbf{v}'_i)^T$ die Linke-Eigenvektoren der Matrix A.